Ad Annibale Pastore
in segno di alta stima e d'affetto
l'autore

NUOVO SAGGIO SU L'INFINITO

Contributo allo studio dei problemi della logica

MEMORIA

LETTA DAL SOCIO

GENEROSO GALLUCCI



NAPOLI
MCMXXXI

Estratto dal Vol. LXI degli *Atti dell' Accademia Pontaniana*

NAPOLI - Tipografia dell' Ospedale psichiatrico provinciale « Leonardo Bianchi »

PARTE PRIMA

La contraddizione formale

(Logica del pensato)

CAPITOLO 1.°

IL CONCETTO ED IL GIUDIZIO

1. **Gl' insiemi o aggregati** *secondo* CANTOR e DEDEKIND.

Giorgio Cantor definisce l'*insieme* (o *aggregato* o *classe*) come l'unione di elementi determinati che si possono mediante un criterio riunire in un tutto. [1] In tal modo l'*aggregato* si considera come un *totum simul* attualmente presente al pensiero. Le difficoltà logiche cui dà luogo questo concetto furono poste bene in evidenza da Emil Borel nel cap. 1° delle sue « *Leçons sur la théorie des fonctions.* » Il concetto di *totalità* di infiniti elementi, quando venga accolto senza le necessarie garanzie, dà luogo, come ha dimostrato Russell, alle antinomie [2]. Prima di Cantor il Dedekind aveva dato una definizione indiretta dell' aggregato: *un insieme od* aggregato *è determinato quando esiste un criterio* C *tale che per ogni oggetto singolo si possa dire se soddisfa o no a quel criterio* [3]. S' indicheranno allora con α gli oggetti che

---

[1] Unter einer Mannichfaltigkeit oder Menge versiehe allgemein jedes Viele welche sich als *Eines* denken lässt, *d. h. jeden* INBEGRIFF *bestimmter Elemente welcher durch ein* GESETZ *zu einem* GANZEN *verbunden werden kann* « (Uber unendliche lineare Punktmannichfalligkeiten » Math. Annalen Vol. 21 ed Acta Mathem. 2° vol.)

[2] Per l'esposizione e la critica del sistema di Russell vedi i n. 19-23 di questo saggio.

[3] Richard Dedekind : « Was sind und was sollen die Zahlen »

soddisfano al criterio C e con *non* α gli oggetti che non soddisfano al criterio C. Così l'*aggregato* non viene considerato come *totum simul* attualmente presente (come nella definizione cantoriana), ma *in fieri.* Di più, si prescinde del tutto dalla particolarità del criterio C, per cui questo riesce più o meno facilmente applicabile, e dalla particolarità dell' insieme nei riguardi del numero degli elementi.

I logici moderni, con Russell a capo, identificano *la classe, l'aggregato* con il concetto. Tale identificazione, intesa senza le necessarie limitazioni, conduce ad identificare la matematica con la logica formale. È vero che la *classe* come *molteplicità unificata* può rappresentarsi con il concetto corrispondente, ma le teorie logiche delle classi e del concetto costituiscono soltanto il presupposto *formale* delle teoria degl' insiemi della matematica che procede con i suoi propri metodi alla ricerca e alla scoverta di proprietà valevoli *vi materiae.* Allo stesso modo la teoria logica formale delle relazioni tra concetti è il presupposto della teoria matematica delle funzioni, ma non può identificarsi con questa per la differenza di contenuto. Si confrontino a tale proposito le teorie logiche del concetto quali sono presentate dalla logica classica e dalle varie ricostruzioni moderne con la teoria degl' insiemi di Cantor, e la teoria delle relazioni qual' è esposta nei « *Principia Mathematica* » di Russell e Whitehead con la teoria delle funzioni quale si è svolta nell'alta analisi da Abel a Riemann e poi a Weierstrass e così via sino agli ultimi notevolissimi progressi attuali.

Nel presente saggio noi partiremo dal collegamento della *classe* od aggregato, come molteplicità unificata, con il concetto corrispondente, e cercheremo di definire le condizioni necessarie e sufficienti per la determinazione del concetto nel campo della pura logica. Gli esempi che addurremo a chiarimento della nostra indagine saranno tratti principalmente dalla matematica; il lettore attento comprenderà che questo non costituisce affatto un' interferenza della matematica con la pura logica.

2. Difficoltà logiche del concetto dekindiano di classe e loro superamento; il genere prossimo di Aristotile.

Diremo con Dedekind che un *insieme* od *aggregato* è determinato quando esiste un criterio C tale che per ogni singolo oggetto si possa dire se soddisfa oppure non soddisfa a quel criterio. Allora risulta determinato anche il concetto corrispondente: il criterio di determinazione C corrisponde alla *comprensione* del concetto; l'aggregato degli α che soddisfano al criterio C

corrisponde all' *estensione* del concetto; l' aggregato dei non-α è costituito da tutti gli oggetti che non soddisfano al criterio C.

Come dev' essere intesa la disgiunzione α, *non* α? A prima vista sembra che tale disgiunzione debba essere intesa in modo assoluto, ma la necessità di evitare fin dal principio l' uso di proposizioni *prive di senso* ci indurrà a porre una limitazione.

Sia α il concetto di *triangolo equilatero*; *non* α sarà non-triangolo equilatero; il criterio C è l' *avere i tre lati eguali.*

Ebbene questo criterio *ha senso* solo se si applica ai triangoli; a nessuno verrà mai in mente di applicarlo ad una rosa, alla stella Sirio all' uomo, al cavallo ecc. Dire, ad es: che un cavallo ha i tre lati eguali non ha senso, come non avrebbe senso dire che una lunghezza è eguale a un peso.

Poichè le proposizioni aventi un *valore logico* (vere o false) debbono avere innanzi tutto *un senso*, è necessario escludere dai principi della logica le proposizioni prive di senso. Ed allora non - α (nell' esempio riportato) non dev' essere non triangolo equilatero ma *triangolo non equilatero.* La definizione dedekindiana della *classe* (e del concetto) va dunque integrata così: *Un' insieme è determinato quando esiste un criterio C* (α) *tale che per ogni oggetto singolo si possa decidere se esso soddisfa o non soddisfa al criterio C*, PURCHÈ L' APPLICAZIONE DI TALE CRITERIO ABBIA UN SENSO. L' insieme di tutti gli oggetti per i quali l' applicazione del criterio C (α) ha un senso si dirà *genere prossimo* dell' insieme α. Così: *triangolo* è il genere prossimo di *triangolo equilatero*; la disgiunzione completa avrà luogo nel genere prossimo: tra tutti i triangoli, il criterio C *dei tre lati eguali* (differenza specifica) permetterà di distinguere gli α che sono triangoli equilateri, dai non - α che non sono triangoli equilateri. In ciò che precede abbiamo visto che se la disgiunzione α - non α è intesa limitatamente al genere prossimo di α si riesce ad evitare l' introduzione nella logica di proposizioni prive di senso; ora mostreremo che se la disgiunzione α - non α viene intesa in modo assoluto non è possibile la determinazione dei concetti e l' antinomia si presenta nei principi stessi della logica formale.

La disgiunzione assoluta implica la considerazione della totalità degli oggetti (*universo assoluto*) che ci trasporta in piena metalogica (regione delle antinomie). I filosofi da secoli ci insegnano che l' assoluto non si può pensare senza contraddizione; non c'è mica bisogno di passare attraverso i geroglifici di Frege e di Peano per convincerci che dalla logica del *pensiero determinato* (logica formale) è necessario escludere *l' assoluto Tutto*,

Geroglifici di Peano

la classe di tutti gli oggetti, la classe di tutte le classi, la classe di tutte le proposizioni.

Bertrand Russell ha dimostrato che l'introduzione di questi elementi nella logica formale conduce inevitabilmente ad un'antinomia che intacca i principi stessi della logica e della matematica. Vedremo tra breve in qual modo il Russell sia pervenuto a questa antinomia e ricercheremo la ragione profonda del suo insuccesso nel tentativo di risolverla.

3. L'invarianza del significato del concetto nel processo logico.

In un concetto determinato α distinguiamo: il criterio C (α) che lo definisce (comprensione del concetto), il genere prossimo α_1 cioè la classe di tutti gli oggetti per i quali ha un senso l'applicazione del criterio C; la α *denominazione*, cioè la contrazione del significato in una parola od in un gruppo di parole, in un segno od in un gruppo di segni; la α *classe*, cioè l'insieme di tutti gli α_1 che soddisfano al criterio C (estensione del concetto). Collegata con la α classe sarà la classe dei *non* α, cioè l'insieme di tutti gli α_1 che non soddisfano al criterio C.

La disgiunzione α - non α viene intesa solo nel genere prossimo α_1.

Il concetto α, così inteso, ha un significato invariante in ogni processo logico che si riferisca ad α. Questa condizione dell'invarianza del significato del concetto è poi la condizione della stessa intelligibilità del linguaggio.

I principi fondamentali della logica (le così dette *leggi del pensiero*) non sono che le varie forme nelle quali si può enunciare il principio dell'invarianza del significato dei concetti nei processi logici.

1° Ogni α è *un* α (principio d'identità)

2° Nessun α può essere *un non* α, e nessuno *non* α può essere *un* α (principio di contraddizione)

3° Ogni α_1 (genere prossimo di α) o è *un* α, oppure è *un non* α (principio del terzo escluso).

In tutte e tre queste proposizioni l'invarianza va intesa in questo modo: il concetto α viene conservato nel suo simbolo (α), nella sua denominazione, nella sua comprensione e nella sua estensione. Di più, se la α *classe*, nella prima parte della proposizione è intesa come classe di *singoli individui*, oppure come classe di classi, anche nella seconda parte va intesa come classe di singoli individui o come classe di classi.

Non soltanto i tre principi fondamentali della logica trovano la loro giustificazione nel principio dell' invarianza del significato del concetto, ma anche tutti i *praeambula logicae*, cioè tutte le leggi che si premettono all' analisi delle varie forme di sillogismi. Per evitare il circolo vizioso di dimostrare per sillogismi la validità logica del sillogismo, tale validità dev' essere giustificata solo in base al principio dell' invarianza del significato dei concetti. (Vedi il cap. 2° di questo saggio).

Che a fondamento della logica formale debba essere l' invarianza di significato dei concetti quale condizione dell' intelligibilità del linguaggio, fu una felice intuizione di Leibniz, molto opportunamente ricordata da Federico Enriquez in un suo recente libro [1].

4. **Condizioni necessarie e sufficienti per la determinazione del concetto.**

I concetti della logica formale risultano determinati se, e *solo se, la disgiunzione* α *- non* α *è intesa limitatamente al genere prossimo.* Così risultano confermati i risultati di un' importante ricerca di G. Milhand su la limitata applicabilità del principio di contraddizione [2].

La condizione enunciata é necessaria : infatti, se essa non si verifica, cioè se non si tiene conto del genere prossimo del concetto non è possibile evitare la considerazione della classe di tutte ie classi e l' intervento di proposizioni prive di senso (N. 2).

La condizione è pure sufficiente : infatti la considerazione del genere prossimo determina il concetto α in un modo che nessun altro si possa confondere con esso ; è possibile così la conservazione dei significato del concetto nel processo logico, ed insieme con i concetti risulteranno perfettamente determinati, come vedremo, i giudizi ed i ragionamenti tipici.

Prima di passare oltre dobbiamo superare un'obbiezione che può presentarsi contro la tesi stessa della determinatezza dei concetti logici.

5. **Pregiudiziale dello scetticismo logico e suo superamento; il criterio della testimonianza.**

La pregiudiziale dello scetticismo è basata su questi due punti: I si nega la possibilità di determinare un concetto in modo che questo sia *distinto*

---

[1] «Per la storia della logica» Ed. Zanichelli p. 210 e seguenti.

[2] «Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique» Paris 1894. «Le rationnel» Paris 1898.

da ogni altro, poichè bisognerebbe distinguere un oggetto dagl' infiniti altri, e, per caratterizzarlo, bisognerebbe distingnere le proprietà caratteristiche dalle infinite altre proprietà comuni con altri oggetti; II Si nega la possibilità dei ragionamenti perchè, non risultando determinati i concetti, il loro significato non può rimanere invariante nel discorso.

Risposta al I argomento. Presento le « Disquisitiones arithmeticae » di Gauss, uno dei monumenti più meravigliosi del genio matematico. Attraverso una serie di scoverte importanti nella teoria dei numeri e nella teoria delle equazioni Gauss arriva a trovare la condizione necessaria e sufficiente perchè un poligono regolare di *p.* lati, con *p.* numero primo, sia costruibile con la riga e col compasso (p dev' essere della forma $2^k + 1$). Apro il libro e mostro allo scettico i *concetti determinati* della teoria: « Voi avete negata l'esistenza dei concetti determinati, ebbene eccoli: numero primo, poligono regolare, equazione irreducibile ecc. » Chiamo questo *l'argomento di Diogene,* per le ragioni che vado ad esporre.

La tesi dell'unità dell'*Essere* fu fondata da Parmenide su *l'immutabilità*: « Esiste l'uno immutabile » (l' Essere immutabile, ingenerato, indistruttibile, omogeneo, compatto, la cui dispersione ed il cui mutamento viene impedito da una necessità interiore, che lo tiene unito e da per tutto eguale *come* una sfera omogenea). « Il molteplice » che non persiste, ma diviene è il *Non essere* » « Non si può pensare se non ciò che persiste, cioè l'Essere; il *Non-essere*, poichè non persiste, è impensabile » Zenone d' Elea, a conferma della tesi parmenidea dimostrò con i suoi argomenti sul moto l'impensabilità del molteplice che diviene: « Il movimento *non è* perchè non si può pensare senza contraddizione ». La fantasia dei primi storici della fiosofia immaginò l' episodio di Diogene che ascolta il lungo discorso di Zenone e per tutta risposta si alza e si mette a camminare.

A distanza di secoli si è ripetuto, e fuori fantasia, questo momento caratteristico dell' idealismo primitivo eleatico: Hegel, nel suo sistema svolse la tesi dell'unità dell' Assoluto nel suo significato dinamico, includendo tutti i temi speculativi che si sono presentati e svolti nella filosofia; Bradley, nell' opera « Appearance and Reality », a conferma della tesi hegeliana dimostrò la contradditorietà del molteplice, fermandosi in modo particolare su *l'impensabilità della relazione.* Ed anche quì c'è stata la risposta di Diogene: *il matematico si è messo a camminare* e proprio negli anni che seguirono la pubblicazione dell'opera di Bradley, la teoria delle relazioni, nella sua forma concreta di teoria delle funzioni, accentuò i suoi

progressi (equazioni integro-differenziali, perfezionamento del concetto d'integrale, funzioni discontinue ecc.)

Risposta al 2° argomento. Lo stesso scettico, che nega la possibilità del ragionamento perchè dichiara impossibile determinare i concetti in modo che il loro significato resti invariante nel discorso, non può nulla concludere *se non ammette l'invarianza del significato delle sue parole nel* SUO DISCORSO. *Egli dunque nega la sua attività nel momento stesso in cui la pone in atto.* Questo è l'argomento di Cartesio in tutta la sua generalità.

L'argomento di Diogene e l'argomento di Cartesio costituiscono i due aspetti di quello che io chiamo *criterio della testimonianza,* che, presentato in questa forma, ha la sua piena efficacia nella *logica del pensiero determinato,* perchè dà la ragione vera e profonda della validità dei principi della logica formale: 1° esistono concetti determinati il cui significato permane nel discorso: eccoli, con il loro genere prossimo e con la loro differenza specifica (es: triangolo equilatero) 2° Negare la validità del principio di contraddizione, del principio d'identità e degli altri praeambula logicae equivarrebbe a negare l'attività del pensiero nel momento stesso in cui si attua.

Il criterio della testimonianza è valido *vi materiae;* esso prende in pieno l'attività stessa del pensare come contenuto fondamentale di ogni processo ideale. Nella forma in cui si è presentato esso fornisce le credenziali degli stessi principi della logica formale; nel passaggio dalla logica alla matematica e dalla matematica alle scienze fisiche, tale criterio si arricchirà di nuovi elementi e si presenterà in forme sempre più complesse, esprimendo sempre più compiutamente la *funzione oggettivante* dell'attività del pensare.

Nell'ordine d'idee ora esposto si può dare la risoluzione di un'altra difficoltà che si presenta nella determinazione stessa del genere prossimo. Per evitare l'intervento della classe di tutte le classi nella formazione del concetto, la disgiunzione α-non α deve intendersi limitata al genere prossimo α, (N. 2). La classe α, é costituita da tutti gli oggetti per i quali l'applicazione del criterio C (α) ha senso. Ora, il distinguere gli oggetti per i quali l'applicazione del criterio C ha senso da quelli per i quali l'applicazione del criterio non ha senso implica per l'appunto la considerazione della classe di tutti gli oggetti. La disgiunzione assoluta e l'assoluto tutto, cacciati dalla porta rientrano per la finestra.

Risposta. Allo stesso modo come la conoscenza sensibile non ha in un suo momento per oggetto tutto l' universo, ma solo ciò che l' attività selettiva dell' attenzione ha presentato alla coscienza, così la conoscenza concettuale non ha per oggetto l' assoluto tutto, ma un campo determinato dell' attività cognitiva. Ciò che si esclude dalla soglia della coscienza nel primo caso, non viene escluso *dopo averlo considerato*, ma, per dir così, automaticamente. Così pure nel caso della conoscenza concettuale: se faccio della matematica, non considero *prima* tutto l' universo e *poi* da questo estraggo ciò che appartiene al campo speciale che io considero, ma dalla mia ricerca restano automaticamente esclusi gli oggetti che non si riferiscono allo speciale argomento trattato da me.

In sostanza, quando io dico che per un oggetto α, l' applicazione del criterio C *non ha senso*, voglio dire che l' oggetto α, è automaticamente escluso dall' attuale ricerca, è *insignificante* per me nella determinata teoria che sto trattando.

Così risulta pienamente legittimata l' introduzione del genere prossimo nel concetto. L' esclusione di questo importantissimo elemento condusse i logici alla confusione della logica formale con la metalogica. In qualsiasi teoria la disgiunzione α - *non* α viene intesa in senso assoluto, non riesce possibile evitare la considerazione esplicita della classe di tutti gli oggetti, della classe di tutte le classi.

6. Altre considerazioni su la determinazione dei concetti; la comprensione e l' estensione di un concetto.

Fissato un concetto α, ad esso risultano collegate due classi: 1°, la classe delle proprietà o note caratteristiche di α *implicite* nel criterio C (α), si ha così la *comprensione* del concetto. 2°, la classe degli oggetti α che soddisfano al criterio C (α), la α-*classe*, che ci dà *l' estensione* del concetto α. Mentre l' estensione di α è del tutto determinata dalla definizione, o anche dalla semplice posizione di α tra le premesse di una teoria, la comprensione si amplia sempre più a misura che si sviluppa il processo della conoscenza. Il progresso può consistere: 1° nel mostrare che alcune note *a*, *b*..... sono implicite in quelle già poste nel criterio C; 2° nel provare che, delle note da aggiungere, alcune sono compatibili altre incompatibili con le precedenti. Così, se alla comprensione del concetto del *triangolo equilatero* aggiungo una nota che vi è implicitamente contenuta, p. e. l' essere equiangolo, l' estensione non muta. Se aggiungo una nota che non

è implicitamente contenuta nelle precedenti, ma è con esse compatibile, la comprensione si amplia, ma l'estensione si restringe. Ad es: se dico: triangolo equilatero avente il lato di un metro, dalla classe dei triangoli equilateri passerò alla sottoclasse dei triangoli equilateri con il lato di un metro. Se, infine, aggiungo una nota incompatibile con le precedenti, la comprensione si amplia, ma l'estensione si annulla. Così, per il triangolo equilatero è incompatibile l'avere un angolo retto. Se io, ignorando la propietà della somma degli angoli di un triangolo, riunissi in un concetto α le due note espresse dalle parole: triangolo equilatero e triangolo rettangolo, potrei illudermi di aver costruito un concetto reale fino a quando non mi risultasse che la α *classe* é una *classe nulla*, cioè che le due note messe insieme sono incompatibili.

L'aggiunta di nuove note non implicite nella comprensione, ma compatibili con esse implica un processo di successiva distinzione che può arrivare fino all'*individuazione*. D'altra parte ognuna di queste aggiunte determina nella classe α una sottoclasse, in modo che il processo presenta α anche come *classe di classi*. Così, preso per il concetto α quello dei *numeri interi*, se consideriamo le potenze con esponente positivo non nullo, possiamo distinguere nell'α *classe* la classe α_2 delle potenze di 2, la classe α_3 delle potenze di 3..... la classe α_n delle potenze di *n*, qualunque sia n, ed, infine, la classe α' dei numeri interi che non sono potenze. La classe α si potrà dunque considerare, sia come classe dei singoli numeri interi, sia come la classe formata dalle classi (α_2, α_3, ... α_n ...., 1 α'). Continuando il processo, anche la classe α_2, p. e., si può presentare come classe di classi: poniamo in una classe α_2' le potenze di 2 comprese nell'intervallo (1 — 10), in un'altra classe α''_2 le potenze di 2 comprese nell'intervallo (10 — 20), in una terza classe α'''_2 le potenze di 2 comprese nell'intervallo, (20 — 30) e così via. Ebbene, α'_2 conterrà gli elementi 2, 4, 8, α''_2 conterrà solo 2^4, individuo classe; α_2''' sarà una *classe nulla* (per un numero intero, l'essere compreso tra 20 e 30 è incompatibile con l'essere potenza di 2). Sicchè il processo di successiva distinzione (amplificazione della conprensione e restrizione della estensione) ci può condurre all'*individuo-classe*, ed anche alla *classe-nulla*.

All'inizio del processo la classe è intesa come classe di *individui;* al principio è dunque il *singolo*, l'individuo logicamente inteso, *il singolare logico*; questo stesso, nel processo di distinzione dei concetti può apparire come classe (*individuo-classe*). La confusione dell'un significato con

2

l' altro dev' essere costantemente evitata, se si vuole che i principi della logica formale vengano espressi con la dovuta chiarezza e precisione.

Il processo inverso della distinzione è l' unificazione. Se invece di aggiungere note alla comprensione le togliamo, la comprensione si restringe, il genere prossimo e l' estensione si ampliano. Cosl, per il *triangolo equilatero* il genere prossimo è *triangolo*; sopprimendo la nota espressa dalla parola equilatero passo dal triangolo equilatero al triangolo: genere prossimo, *poligono,* e così via via. A questo punto si presenta uno dei più notevoli risultati della mia indagine: la determinazione del significato più profondo dell' *assiomatica* hilbertiana.

7. Necessità logica del sistema completo dei principî d' una teoria. Da quanto ho esposto nel n. 2 risulta questa importantissima conseguenza: *non risultano determinati i concetti dei quali il genere prossimo è la classe di tutte le classi.* Infatti il criterio C dovrebbe in tale caso applicarsi esplicitamente alla classe di tutte le classi.

Ora, se dal concetto del triangolo equilatero (per esempio) ci eleviamo man mano a concetti sempre più estesi, corriamo il rischio di trovarci in presenza dell' *assoluto tutto.* Il genere prossimo di triangolo equilatero è *poligono,* il genere prossimo di poligono è linea spezzata, il genere prossimo di *spezzata* è *insieme di punti,* il genere prossimo di insieme di punti è insieme di oggetti nel campo della matematica, e siamo arrivati: il genere prossimo di insieme di oggetti matematici è l' insieme di tutte le classi di oggetti matematici e non matematici. S' impone allora la necessità di fermarci prima di raggiungere come genere prossimo la classe di tutte le classi. Nella logica aristotelica il processo di unificazione ha termine nelle categorie (*summa genera*), e quindi non è possibile nella logica classica eviiare l' interferenza della metafisica. Noi, invece, arrivati all' insieme di tutti gli elementi geometrici (punti, rette, piani) non definiamo questo insieme, ma lo presentiamo in blocco mediante un sistema completo di nozioni primitive e di assiomi. Confronta p. e. Hilbert: « Grundlagen der Geometrie ». Questa concezione del sistema completo dei principî di una scienza o di una teoria costituisce la più importante scoverta della logica moderna; solo ora è possibile ricostruire la logica formale come logica del *pensiero determinato,* senza interferenza della metafisica. In seguito vedremo anche l' importanza dell' assiomatica nella determinazione della validità logica dei processi matematici.

I procedimenti di unificazione e di distinzione in logica formale hanno un inizio ed un termine, senza di che il sistema dei concetti non sarebbe determinato; all'inizio del processo è il *singolo*, l'individuo nel suo significato finito, al termine è l'aggregato dei concetti primitivi e delle proposizioni primitive appartenenti ad un determinato campo di conoscenza, qualunque sia esso *(universo logico relativo al campo)*. In tal modo si riesce ad evitare, da una parte ta concezione metafisica dell'individuo e dall'altra la concezione *dell' assoluto tutto* sotto la forma della classe di tutte le classi; la logica formale sarà resa indipendente dai sistemi filosofici.

Se *l'individuo* e *l'universo* si prendono nel loro significato speculativo, cioè se si passa dal *significato finito* al *significato infinito*, si passa dalla logica alla teoria della conoscenza ed alla metafisica. Allora il principio ed il termine coincidono, sia per l'inscindibilità in atto del distinguere e dell'unificare, sia perchè al principio ed al termine compete la caratteristica della *sempliciià* ed *individuità*. È questa una profonda concezione di Aristotele: la *sostanza* si presenta non solo come *categoria* o sommo genere, ma anche come *individuo*.

8. Considerazioni su l'opposizione logica: i distinti e gli opposti.

Diremo che due concetti α, β sono equivalenti quando, in base alle comprensioni di α e di β, risulta ogni α è un β e che ogni β è un α. Ad esempio i due concetti di triangolo equilatero e triangolo equiangolo sono equivalenti perchè ogni triangolo equilatero è equiangolo ed ogni triangolo equiangolo è pure equilatero. Due concetti equivalenti sono coestensivi, ma differiscono per la comprensione e per la denominazione.

Due concetti che differiscono per l'estensione, la comprensione e la denominazione si diranno *distinti*. Es: triangolo equilatero e triangolo isoscele; triangolo equilatero e circolo. Due concetti α, α_1 distinti si diranno *congiunti* o *disgiunti* secondo che la α-classe e la α_1-classe presentano oppure non presentano elementi comuni. Ad esempio i concetti di numero primo e numero pari sono congiunti perchè nelle due classi corrispondenti vi è un elemento comune *2* (che è pari e primo); i concetti di triangolo e circolo sono disgiunti perchè nessun triangolo può essere circolo e nessun circolo può essere triangolo.

Diremo che due concetti α α_1 sono opposti relativamente ad un *universo logico* γ quando le classi α ed α_1 sono disgiunte, ed insieme esauriscono la classe γ; così, rispetto all'universo logico dato dal genere prossimo α^1,

gli α ed i non α formano due classi disgiunte (nessun α può essere un *non* α e nessun *non* α può essere α) ed insieme esauriscono la classe α_1 (sia gli α che i non α sono degli α_1 ed ogni α_1 o è un α oppure è un non α). Invece, rispetto all' universo logico *poligono*, triangolo e quadrilatero sono disgiunti (nessun triangolo può essere quadrilatero e viceversa) ma non opposti (i triangoli ed i quadrilateri non esauriscono la classe dei poligoni; i pentagoni p. e. sono poligoni e non si trovano nè tra i quadrilateri nè tra i triangoli).

Per le ragioni dette e ripetute escludiamo dalla logica formale l' universo logico assoluto e la opposizione assoluta.

9. **Il giudizio: la relazione tra due concetti.**

L' atto del pensiero che unifica e distingue è espresso in una proposizione che chiamasi giudizio e che *significa una relazione tra i distinti unificati.* Così, nella costituzione del *concetto* α i singoli oggetti α sono distinti in quanto diversi, ma unificati in quanto soddisfano al criterio C (α); i singoli oggetti *non* α sono distinti in quanto diversi, ma unificati in quanto non soddisfano al criterio C (α). Abbiamo così i giudizi che esprimono una relazione del concetto α con se stesso. Tale relazione ha un significato determinato da ognuno e da tutti e tre i principi fondamentali della logica (ogni α è un α; nessun α è un non α.....). Questi giudizi sono già impliciti nella costituzione stessa del concetto e si presentano sotto due aspetti: 1° riguardo alla comprensione: di ogni α *si predica* il soddisfare o il non soddisfare il criterio C (α).

2° riguardo alla estensione: di ogni singolo oggetto si predica l'appartenere od il non appartenere alla classe α.

Il processo unificativo di due o più concetti diversi dà una relazione tra due o più concetti, che viene espressa dai giudizi logici ridotti a forma tipica da Aristotile:

A: «ogni α è un β; giudizio universale affermativo.

E: «nessun α è β; giudizio universale negativo.

I: «Alcuni α sono β; giudizio particolare affermativo.

O: «Alcuni α non sono β; giudizio particolare negativo.

Tutti questi giudizi sono *predicativi,* cioè in essi si afferma o si nega di un soggetto (plurale o singolare logico) il soddisfare ad un determinato criterio, o l' essere appartenente ad una classe.

ESEMPIO 1°: ogni poligono regolare (soggetto) è inscrittibile in un cerchio (predicato). Quì il soggetto è un singolare grammaticale, ma plurale logico; di esso si predica l' inscrittibilità in un cerchio, cioè l' appartenenza alla classe dei poligoni che possono inscriversi in un cerchio.

ESEMPIO 2° Il numero pari 2 è primo. Il soggetto è un singolare grammaticale e logico, di esso si predica *l' esser primo* cioè l' appartenere alla classe dei numeri primi.

Consideriamo ora la proposizione: " gli apostoli sono dodici „ (esempio presentato da Peano come giudizio non predicativo.) A prima vista sembra che la forma di questo giudizio non possa rientrare in nessuna delle forme tipiche di Aristotele. Se non badiamo alla forma, ma al significato riconosceremo in quella proposizione un giudizio del tipo A. Infatti il soggetto gli *apostoli* è un plurale grammaticale, ma un singolare logico (il gruppo degli apostoli). Di tale soggetto si predica il soddisfare al criterio espresso dal *predicato grammaticale.* Quando si dice che un aggregato è di dodici oggetti si vuole esprimere l' appartenenza di quell' aggregato alla classe di tutte le classi di dodici oggetti, cioè che quell' aggregato può porsi in corrispondenza con qualsìasi classe che possa dirsi una dozzina. (Questo concetto è alla base della moderna teoria dei fondamenti dell' aritmetica). Se si confonde il plurale logico con il plurale grammaticale ed al predicato grammaticale si attribuisce il significato distribuitivo (che compete solo al predicato logico) si ha questo *non senso*: *gli apostoli* sono *dodici*, dunque un *apostolo* è *dodici.* Il vero significato della proposizione risulta trasformandola nella forma: *il gruppo degli apostoli* (singolare logico) è *una dozzina* (predicato logico.) Tipo: " questo α è un β „ *giudizio singolare* che Aristotele incluse giustamente nel tipo A (universale affermativo).

L' esempio ora presentato dimostra che nella determinazione del significato dei giudizi bisogna adoperare le stesse cautele usate nella determinazione del significato del concetto,

La quistione principale è questa: *vi sono relazioni tra concetti non riducibili alla relazione di appartenenza di un singolo ad una classe, o di una classe ad una classe di classi., cioè:* vi *sono giudizi logici non predicativi?* Per risolvere questa quistione dobbiamo approfondire il significato delle relazioni tra due concetti α, β.

10. **Fondamenti di una teoria logica delle relazioni.**

Diremo in generale che tra i concetti α, β viene posta la relazione (α ; β) quando esiste un criterio R (α—▷β) tale che *determinato* β *risulti determinato anche* α. Il criterio R può essere il semplice criterio di appartenenza a β (p. e. ogni α è un β, tutti gli α si trovano tra i β e quindi nota la classe β è implicitamente nota anche la classe α) oppure può essere un criterio più generale dipendente dai criteri C (α), C (β) e tale che per ogni β risulti determinato un α, oppure un aggregato di α. Nel primo caso la relazione (α R β) esprime il fatto che *l' appartenere a* β è una proprietà degli α e si hanno così i giudizi predicativi del tipo aristotelico. Nel secondo caso la relazione (α R β) esprime una corrispondenza tra α, β consistente in un criterio determinato che applicato a β ci conduce ad un α o ad un aggregato di α. Tale criterio può anche essere espresso da operazioni determinate da eseguire su β. Così la relazione « α padre di β » significa che esiste un criterio determinato che applicato a β ci fa passare ad α; la relazione « *corde* sottese agli *archi* di uno stesso circolo » significa che esiste una operazione determinata che eseguita su un arco ci da una corda sottesa all' arco. (L' operazione consiste nel congiungere gli estremi dell' arco con un segmento.

I termini α, β della relazione possono essere singoli enti o classi di singoli enti o classi di classi. il primo termine α si dice *referente* della relazione (α R β) ed il secondo termine relato. Russel chiama *dominio* della relazione (α R β) la classe di tutti gli R β cioè di tutti i referenti α.

Al criterio R (α—β) è sempre associato un criterio inverso R (β—α) che determina un' altra relazione (β R' α) che dicesi *inversa* della (α R β).

Il dominio della relazione inversa è la classe di tutti gli R' α, cioè di tutti i relati β della relazione diretta. Questi due domìni insieme costituiscono il *campo* della relazione diretta e della relazione inversa. Così nell' esempio riportato da Russell, se la relazione è la *paternità*, i padri formano il dominio della relazione inversa, padri e figli costituiscono poi il campo della relazione.

Russell, che abbonda sempre in sottili distinzioni, enumera tre tipi principali di relazioni: 1. tipo: relazione R. tali che il referente è unico quando il relato è dato. Queste relazioni corrispondono alle funzioni ad un sol valore. Molte relazioni si riducono al tipo ora indicato mediante un'opportuna limitazione del dominio diretto od inverso della relazione.

Così la relazione « moglie » ha il referente unico quando il relato (marito) si limita agli uomini di religione cristiana. (L'esempio è di Russell, e, come spesso accade negli esempi concreti presentati da questo autore, non risponde del tutto allo scopo di chiarire il concetto corrispondente: basterebbe ricordare Anna Bolena, Giovanna Seymur, e le altri mogli di Enrico VIII) 2. tipo: relazioni R che stabiliscono tra le classi α, β una corrispondenza. Es: α direttamente proporzionale a β). 3. tipo: relazione R il cui criterio è *ricorrente* e che mediante l'iterazione possono dar luogo ad una serie (Es: α successivo di β, serie naturale dei numeri: 2 successivo, di 1, 3 successivo di 2 ecc).

Una teoria esauriente delle relazioni è stata data da Russell nei « Prin cipia mathematicae » volume 1. (Cambridge 1910) da pag: 241 a pag. 665. Sono più di 400 pagine scritte nella pasigrafia peaniana e che tradotte nel linguaggio comune darebbero un volume di più di 1000 pagine. L'opportunità di parecchie delle sottilissime distinzioni, sia dal punto di vista della logica, sia dal punto di vista dei fondamenti dell'aritmetica, è molto dubbia ed è un problema estremamente difficile sceverare nella selva selvaggia il troppo ed il vano da qualche felice intuizione. Io farò uso soltanto della terminologia introdotta da Russell, ponendo completamente da parte il blocco della teoria; mi giustificherò in un prossimo paragrafo.

Pasigrafia Peano

Ma anche ammesso che la teoria sia presente al lettore in tutti i suoi particolari, una sola conclusione può trarsi che abbia significato per la mia indagine ed è la seguente: *ogni giudizio che esprima una relazione tra due concetti deve potersi porre sotto la forma di un giudizio predicativo.* Infatti, del soggetto (il *referente* od il *relato* della relazione) si predica di appartenere all' uno od all' altro campo della relazione.

Noto subito che vi è un perfetto parallelismo tra la costituzione di un concetto e la definizione di una relazione. Al genere prossimo α_1 del concetto α corrisponde il *campo* della relazione; alle classi degli α e dei *non* α che esauriscono la classe α_1 corrispondono i due *domini* diretto ed inverso della relazione. E, come lo stesso criterio C determina il genere prossimo α_1 e le due sottoclassi α, *non* α, così il criterio R (α—β), in una relazione perfettamente definita, determina il campo della relazione ed i suoi due domini R β ed $\breve{R}$, α. Ad es: la relazione espressa dall' *essere maggiore di* non ha senso alcuno applicata ad enti che non siano numeri o grandezze omogenee; essa già determina il suo campo ed i suoi domini.

Come un concetto non è logicamente determinato se il genere prossimo è la classe di tutte le classi, così una relazione non è logicamente determinata se il suo campo è la totalità assoluta degli oggetti.

Inoltre, il significato della relazione, come quello del concetto, è duplice: *significato nella comprensione* (applicabilità o non applicabilità del criterio determinante R $(\alpha - \beta)$; *significato nella estensione* (particolarità dei due domini R β, R α). Per evitare le difficoltà logiche presentate dal concetto cantoriano di classe (la classe come TOTUM SIMUL *attualmente* presente) bisogna fondarsi principalmente sul significato *in comprensione*.

Una classificazione delle relazioni, basata sulla proprietà di esse, deve dunque stabilirsi tenendo presente prima di tutto il criterio R $(\alpha - \beta)$; le particolarità del campo e dei due domini debbono essere chiaramente dedotte dal criterio stesso.

Una relazione può coincidere o no con la sua inversa; ecco la prima e fondamentale classificazione. L' *identità*, l' *equivalenza* nei suoi significati concreti (equivalenza di classi, equivalenza di figure, congruenza di numeri ecc. ecc.) appartengono al 1.° tipo. Sono queste relazioni simmetriche (se $\alpha \equiv \beta$ è pure $\beta \equiv \alpha$) e transitive (se $\alpha \equiv \beta$ e $\beta \equiv \gamma$ è pure $\alpha \equiv \gamma$). Le relazioni del 2.° tipo non sono simmetriche (se α R β non è β R α ma β R' α), ma possono essere transitive o non transitive. Sono transitive le relazioni di disuguaglianza (*maggiore di, minore di*) e di sequenza (precedente seguente) e le relazioni dette dal Frege *ancestrali*. (Fissato un certo ordine mediante una relazione R_1 si dirà che α R β è una relazione ancestrale *rispetto* ad R_1 quando, scelto comunque un referente α' ed un relato β' esiste una successione finita e determinata di riferenti α_1, α_2, ... α_k tale che α' R_1 α_1, α_1 R_1 α_2, ... α_k R_1 β. Abramo antenato di Davide perchè Abramo generò Isacco, Isacco Giacobbe, Giacobbe Giuda .... Ober generò Jeffe e Jeffe Generò David. La R è espressa dalla parola antenato, la R_1 è la paternità; α, α_1, α_2 ..... α_k, β sono Abramo, Isacco, Giacobbe .... Jeffe David. Ecco spiegato il perchè del nome della relazione ancestrale; il perchè della introduzione di queste relazioni risiede nell'applicazione che se ne è fatta nei fondamenti dell'aritmetica (le *catene di enti* di Dedekind). Sono intransitive ad es: le relazioni espresse dalle parole *successivo di, padre di* (se α è successivo di β e β è successivo di γ, α non è successivo di γ; se α è padre di β e β è padre di γ, α non è padre di γ). Queste due relazioni possono dar luogo ad una relazione transitiva ancestrale (successione dei numeri interi, successione degli *antenati*).

La dottrina delle relazioni assume fondamentale importanza nello studio dei principî dell' aritmetica e della teoria delle funzioni. I particolari della classificazione che abbiano appena accennata e lo studio delle corrispondenze collegate con le relazioni non appartengono alla logica formale ma alla matematica.

11. **Altre considerazioni sui giudizi che si possono porre sotto la forma di giudizi predicativi.**

Prima di potere affermare che ogni giudizio logico determinato, e che abbia un significato, può porsi sotto la forma di giudizio predicativo, dobbiamo occuparci di alcuni giudizi che ordinariamente si presentano sotto forma non predicativa, e sono: 1° i giudizi nei quali il verbo è adoperato impersonalmente: 2° i giudizi enumerativi: 3° i giudizi che esprimono una relazione condizionata.

Nelle proposizioni del 1° tipo manca il soggetto. « Piove. » Ecco una informazione nella quale di un soggetto non espresso (le condizioni metereologiche) si predica la particolarità espressa dalla parola pioggia. Ma il soggetto di *Piove* assolutamente non c' è, nè espresso nè sottinteso: non è Giove pluvio che *piove*, non sono le condizioni atmosferiche che *piovono*. Quando io dico: *piove*, senz' altro aggiungere, il giudizio è *logicamente insignificante*; esso acquista un significato solo se è unito ad altri giudizi in un determinato processo logico. « Piove, esco con l' ombrello » Queste poche parole presentano un sistema collegato di giudizi predicativi, che si possono dare in forma esplicita: *a*) « Ognuno che esca senza ombrello, quando piove, si bagna » *b*) « Ognuno che, con la pioggia, esce con l' ombrello, non si bagna » *c*) « Ognuno che debba uscire con la pioggia e non voglia bagnarsi, dovrà uscire con l' ombrello ».

Dei giudizi del 2° tipo ci siamo già occupati nel n° 9; a maggior chiarimento portiamo un altro esempio: « I poliedri regolari sono cinque. » Questo giudizio si può porre anch' esso sotto la forma predicativa: della classe dei poliedri regolari (cubo, tetraedro, ottaedro, dodecaedro, isocaedro), che è il soggetto, si predica l' essere in corrispondenza biunivoca con ogni classe di cinque oggetti (p. e. le dita di una mano). La sola particolarità che si presenta in tali giudizi è che il predicato (cinque) non ha significato distribuitivo rispetto al soggetto: di uno dei poliedri regolari non si può predicare *l' esser cinque*.

Il terzo tipo di giudizi è dato dai giudizi di *relazione complessa*. Russell conviene che *l' essere un termine del quale Ry può asserirsi* costituisce un predicato, ma nega che *l' essere un termine del quale* PER UN CERTO VALORE DI Y, *Ry può asserirsi* costituisca un predicato. Il dubbio può togliersi osservando che in tal caso si ha un giudizio predicativo complesso risultante da due o più giudizi predicativi semplici. Esempio: « se n è un numero intero e positivo, y^n è maggiore di y se y è maggiore di 1 ». Di y^n si predica l' essere un termine del quale, per valori di y maggiori di uno, l' essere maggiore di y può asserirsi. Questo giudizio complesso formato dai seguenti giudizi predicativi semplici: « n è un numero intero positivo » ; « y è maggiore di 1 » « y^n è maggiore di y »

12. **Il significato implicativo dei giudizi.**

Siano α, β due concetti; il giudizio « ogni α è un β » può interpretarsi in due modi:

a) La α - classe è inclusa nella β - classe (secondo l' estensione).

b) Ogni oggetto α che soddisfi al criterio C (α) soddisfa pure al criterio C (β) (secondo la comprensione).

Nell' uno e nell' altro modo il predicato va inteso *distribuitivamente* rispetto al soggetto; L' ESSERE β *si predica di tutti gli* α *e di ciascuno degli* α (*principium de omni et nullo* di Aristotele). S' intende bene che se il soggetto non è un *molteplice* o *plurale logico* ma un singolo (singolare logico) il predicato grammaticale si attribuisce solo ad esso. Questo avviene, nei *giudizi singolari* e nei *giudizi enumerativi* trasformabili in giudizi singolari. « Questo triangolo A B C è equilatero » ; « Michelangelo fu un grande scultore » giudizi singolari del tipo A ; il predicato grammaticale e logico compete solo al soggetto singolo. « Gli apostoli sono dodici ». Questo si può porre sotto la forma di giudizio singolare del tipo A : « Il gruppo degli apostoli (singolare logico sostituito al plurale grammaticale) è un aggregato di dodici uomini (predicato logico sostituito al predicato grammaticale). Questi giudizi singolari che sono impliciti nella formazione stessa del concetto si possono, in un processo logico, rendere espliciti, cioè enunciarsi separatamente in conseguenza del significato distribuitivo del predicato nei giudizi universali del tipo : « ogni α è un β ».

Si deduce da quando precede il significato *implicativo* dei giudizi, con riferimento alla comprensione dei concetti : « *Se un x è un α, e se* OGNI α *è* UN β, *quell' x sarà un* β ». Cioé se un oggetto x soddisfa al criterio C (α),

soddisferà pure al criterio C(β), sempre che ogni α sia un β. Allora il giudizio logico si presenta come una particolare relazione tra proposizioni, che é l' *implicazione*: *se ogni α é un β, allora ammesso la proposizione X è* UN α *si deduce l' altra proposizione* X È UN β: la prima proposizione: « x è un α » *implica* la seconda: « x è un β » *in virtù* dell' altra proposizione « ogni α è un β » si presenta così, nella stessa determinazione del giudizio logico, la forma più semplice del ragionameato: *ammesso che* (ipotesi), *si deduce che* (deduzione o tesi) *in virtù* di (principio giustificativo o *perchè*). In tal modo risulta chiaramente l'unificazione di concetto, giudizio e ragionamento nella dialettica del pensare : la costruzione dei concetti è, implicitamente, costruzione di giudizi e la costruzione dei giudizi è anche costruzione di ragionamenti. *È impossibile distinguere senza unificare ed unificare senza distinguere.*

13. IL VALORE VERITÀ **dei giudizi.**

Ha un profondo significato in logica la differenza tra *enunciare* semplicemente una proposizione ed *asserirla* vera o falsa. Se un quadrilatero è un parallelogrammo, gli angoli opposti sono uguali. La proposizione isolata « un quadrilatero è parallelogrammo » è semplicemente *enunciata*; l' altra, che gli angoli opposti del parallelogrammo sono eguali , viene asserita come vera dopo una dimostrazione. Su questa distinzione insistono in modo particolare Frege e Russell, i quali però trascurarono questo fatto: perchè una proposizione possa dirsi vera o falsa, essa prima di tutto deve avere un *senso*; le proposizioni prive di senso non possono dirsi nè vere nè false.

Le proposizioni che vengono enunciate in seguito ad un processo logico coerente come quello della costruzione di una teoria scientifica, hanno un senso e vengono asserite come *vere*. le contrarie come *false*. In ciò consiste il *valore-verità* positivo o negativo (*Wahrheitswerth* , come dice Frege) di quelle proposizioni. Un processo logico coerente è quello nel quale non solo rimane invariante il significato dei concetti e dei giudizi, ma anche il *valore verità*, che dai principi deve trasmettersi a tutte le altre proposizioni. Nel capitolo secondo determineremo le condizioni necessarie e sufficienti della coerenza dei processi logici. Ora aggiungeremo alcune altre considerazioni riguardanti le condizioni necessarie per la determinazione del significato dei giudizi logici.

14. Distinzione originaria fondamentale tra il concetto e l' oggetto corrispondente.

Come vi è una sintesi primitiva delle rappresentazioni (la loro unificazione nella mia coscienza, in quanto sono tutte *mie* rappresentazioni), così vi è una distinzione originaria fondamentale: la distinzione tra il *pensiero* e l' *oggetto* del *pensiero*. Se si pensa non si può non *pensare a qualche cosa*; non esiste un pensare che non sia un pensare a qualche cosa, anche quando si pensa il pensiero stesso. Dicendo « il pensiero del pensiero » la stessa parola *pensiero* ha due significati distinti: prima significa il *pensare*, pura attività del pensare, e poi significa il *pensato*, cioè il pensiero come oggetto dell' attività stessa.

Conseguenza: l' oggetto α ed il concetto di α (e la α-classe) sono distinti come l' oggetto del pensiero ed il pensiero. Il triangolo ha tre lati, ma *dire che il concetto del triangolo ha tre lati è un non senso*. Il cavallo ha quattro zampe, ma a nessuno verrá mai in testa di mettersi a contare *le zampe del concetto del cavallo*. Per questa ragione si può affermare che nella logica del pensiero determinato, se α è un concetto la α *classe* non *è un* α. *Le classi di cui si occupa la logica formale, e che determinano concetti, non possono mai contenere se stesse come elemento.*

15. Considerazioni sui giudizi esistenziali; teoria di Brentano.

I concetti definiti (uomo, triangolo, ippogrifo . . .) ed i loro *oggetti* corrìspondenti *esistono* in quanto esiste un processo di pensiero (processo ideale) che li determina. L'*esistenza ideale* dei concetti α, β, . . . può dunque affermarsi *vi formae;* ciò è nella natura stessa della logica formale. Ma nel processo cognitivo di una scienza interviene il contenuto, cioè l'oggetto in quanto ostensibile o non ostensibile. Esperienza, in senso lato, è ogni processo ideale o reale che conduce alla conoscenza di oggetti. Dunque l' essere o il non essere ostensibile deve riferirsi ad una esperienza *attuale* o *possibile.*

Diremo che l'oggetto α esiste realmente (ha esistenza reale) quando, fissato un determinato campo di esperienze, l'oggetto α può presentarsi in una esperienza, attuale o possibile, in quel campo. Il predicato dell'esistenza ha un significato relativo al campo sperimentale che si considera. L'uomo a rosa, il cavallo, esistono realmente (sono ostensibili) nella conoscenza sensibile (1. grado dell'empirica); il punto, la retta, il triangolo esistono realmente nella conoscenza matematica (passaggio dell'intuizione empirica

all'intuizione pura); l'ippogrifo, Minerva, Giove esistono solo nella fantasia di un poeta. Poichè la logica formale si occupa solo della coerenza interiore dei processi cognitivi, i concetti determinati α, β. γ, ... si considerano a prescindere dalla loro esistenza reale, che può asserirsi solo *vi materiae* (Daseinsfreie Gegenstände della Gegenstandstheorie).

La questione del significato logico e psicologico del predicato esistenziale è stata approfondita da Franz Brentano [1] Il quale mantiene specificamente distinti i *giudizi* dalle *rappresentazioni* (come sono distinti i concetti dagli oggetti corrispondenti). Nella rappresentazione solo *il reale, la cosa* (Das Ding, das Reales) è oggetto del nostro pensiero.

Non esistono dunque rappresentazioni di relazioni. Se io mi rappresento qualche cosa *più grande di A* la mia rappresentazione si riferisce ad un *reale* diverso da A *modo recto*, ma si riferisce pure al reale A *modo obliquo*. L'essere di una relazione va inteso in senso improprio; sono reali in senso proprio solo i due termini della relazione. Questa teoria logica è molto importante nel sistema di Brentano e conduce ad un nuovo aspetto del giudizio. «Ogni giudizio è riducibile alla forma predicativa esistenziale» Così ogni α è un β significa «non v'è un α che non sia β» L'essenziale nel giudizio è *l'oggetto α che non è β*, di cui si predica la non esistenza [2] in questa definizione del significato del giudizio il Brentano cercò di fondare una sua riforma della logica aristotelica; ma di questo ci occuperemo a suo luogo (n. 49).

16. **Valore verità dei principi fondamentali della logica.**

Ognuno dei giudizi predicativi della forma «ogni α è un β, è considerato in logica formale indipendentemente dal suo valore-verità (*Wahrheitsfrei*) perchè tal valore implica la considerazione del contenuto del processo razionale

---

[1] «Psychologie vom empirischen Standpunkt» ed 1924 cap. 7 ed Anhang IX Vol: 2° Per Brentano *das ding, das Reales* é l' oggetto a prescindere dalla sua presentabilità o meno; se l' oggetto è presente in un' esperienza attuale o possibile allora si dice che esso *esiste*, è *presentabile* (Wirklich, bestehend). Così se io mi rappresento Minerva, esiste realmente chi si rappresenta Minerva, ma non esiste realmente Minerva.

La distinzione tra *das Reales* e *das Wirklich* può dar luogo ad ambiguità; crediamo sia più chiara la distinzione tra l' esistenza ideale (Minerva, ippogrifo.....) e l' esistenza reale relativa ad un dato campo (rosa, minerale, triangolo.....)

[2] Op. citata: Anhang IX, Vol. 2°.

della teoria che si considera, e quindi può essere determinato solo *vi materiae*. Una proposizione dl uno dei quattro tipi A, E, I, O, potrà asserirsi vera solo quando sia dato il significato concreto dei concetti α, β, γ. Solo dei principi fondamentali logici si può determinare il valore verità indipendentemente dal contenuto e solo *vi formae* «Ogni α è un α» Donde tragghiamo noi il valore-verità positivo di questa proposizione? Ricordiamo ancora una volta che la condizione della permanenza del significato di ogni singolo concetto è la stessa condizione dell' intelligibilità del linguaggio e che l'intelligibilità implica *il pensiero in atto*; ma la proposizione «ogni α è un α» non esprime altro che la permanenza del significato di α (*qualunque sia esso*), dunque il negarla equivarrebbe a negare l'attività del pensiero nel momento stesso in cui questa si attua.

Lo stesso può ripetersi per tutti i principî logici che costituiscono i *pracambula logicae*, una specie di sistema completo dei principi della logica formale (V. pure il § 5 e 7).

È inutile notare, infine, che un criterio *non formale* cioé il *criterio della testimonianza* fornisce le credenziali della validità formale dei principi della logica.

17. **Conclusione della prima tappa del nostro cammino.**

Poste le condizioni per la determinatezza dei concetti e dei giudizi, risulta ben delineato il campo della logica formale sì da evitare l'interferenza di altri campi e sovratutto l'interferenza della metalogica, e sono preparati tutti gli elementi necessari e sufficienti per definire la coerenza interiore dei processi logici. Ma già si è prospettata nella nostra indagine un doppio aspetto della contraddizione: la contraddizione formale che si evita solo con la determinazione dei concetti, dei giudizi, dei ragionamenti (il pensiero nel suo significato *finito*), e la contraddizione reale, che si supera con il criterio dinamico della testimonianza (passaggio dal significato finito al significato infinito). Così l' infinito appare fin dal principio e non quale elemento dissolvitore (come nella metalogica delle antimonie) ma quale elemento creatore della stessa logica del finito.

Le prime forme in cui si presenta la contraddizione reale sono queste:

a) Non si può unificare senza distinguere, nè distinguere senza unificare: il concetto, il giudizio, il ragionamento sono insieme distinti ed unificati (dialettica del pensiero logico).

b) Contrarre l' infinito nel finito è necessario ed impossibile. Tutte le proposizioni ed i concetti che implicano l' infinito attuale sono state escluse dalla logica formale , evitando così di cadere nei *non-sensi* di diversa specie. Le proposizioni riguardanti l' infinito attuale, cui il pensiero è necessariamente condotto, acquisteranno un significato speculativo nel prosieguo della ricerca, ma *questo significato sarà traslato.*

Quale sia la funzione del traslato nella custruzione scientifica e nella speculazione filosofica lo vedremo nella seconda parte di questo saggio.

Ora ci resta a dimostrare che, determinati i concetti e i giudizi nel loro significato finito, è effettivamente preclusa la via d' ingresso all' antinomia nella logica formale. È qui che s' inquadra l' esposizione critica delle teorie logiche di Russell.

18. **I concetti ed i giudizi epimenidei.**

Se si rinunzia alla perfetta determinatezza dei concetti e dei giudizi non si può impedire nella stessa logica formale l' introduzione di proposizioni assolutamente non predicative, che in generale danno luogo ad un' antinomia non risolubile.

ESEMPIO 1° — L'assoluto *non oggetto ;* concetto che automaticamente si muta in altro. Qualunque sia il criterio dell' *oggettività,* la sua applicazione è *attività oggettivante* (il pensiero quale attività oggettivante) e perciò il *non oggetto* diventa l' *oggetto* di tale attività.

ESEMPIO 2° — Proposizione di Cartesio e Malebranche; «Il *nulla* non ha alcuna proprietà» dunque ha almeno questa *proprietà,* quella appunto di *non avere proprietà.*

Chiamo i concetti e le proposizioni di questo tipo , concetti e proposizioni *epimenidee* perchè le loro caratteristiche d' indeterminazione sono quelle stesse che si presentano nel giudizio di Epimenide.

«Epimenide , *che è cretese*, afferma che *tutti i cretesi sono mentitori*». Appena cercate di attribuire ai cretesi il predicato di *mentitore ,* questo immediatamente vi sfugge. Infatti, Epimenide è cretese, e, *se è vero che «tutti i cretesi sono mentitori»* egli ha detto il falso e perciò *non è vero che tutti i cretesi sono mentitori*».

Sotto altra forma, non priva di umorismo, questo argomento è riprodotto nel Don Chisciotte. A Sancio Panza governatore dell' *insula Barataria* fu per burla presentato il seguente quesito : al termine di un ponte c' è una forca e ci sono dei giudici. Chi passa il ponte è obbligato a dire lo

scopo del suo passaggio, e vi è questa legge: se chi è passato dice la verità è lasciato libero, ma se dice il falso dev' essere impiccato. Ora si presenta un individuo che interrogato dai giudici risponde: « Lo scopo del mio passaggio è quello di farmi impiccare a quella forca ». Si presenta allora questo dilemma: se quel tale è veramente impiccato, allora ha detto la verità e dev' essere lasciato libero, e se, d' altra parte, egli viene lasciato libero, ha detto il falso, e dev' essere impiccato.

Di questa specie è l' antinomia di Russell, della quale ora noi ci occuperemo.

19. — **I predicati predicabili di sè stessi: il primo paradosso di Russell.**

Ben due volte Russell nelle pagine tremende che vanno dal capiolo I al V della sua opera fondamentale, fu per arrivare al punto più delicato della logica formale, che gli avrebbe permesso di semplificare e rendere rigoroso tutto il resto dello sviluppo. Si tratta della distinzione tra il concetto α e l' oggetto corrispondente (Pag. 47 e 55). « Io incontro un uomo » qnesta proposizione non si riferisce al *concetto uomo*, dice Russell, ma ad un certo « actual biped denoted by the concept ». Dunque nella detta proposizione un concetto, *uomo*, è unito a ciò che non è concetto, l' *actual biped.* Per intenderci meglio diremo, più semplicemente, che quando Russell incontra un uomo, non incontra mica il *concetto di uomo*, ma un uomo (*oggetto*). È questa la dialettica della formazione dei concetti, cosa antichissima, che però a Russell parve nuova, ed alle tante distinzioni già fatte ne aggiunse un' altra (*meaning, denoting*) e continuò imperterrito nella sua via. Arriviamo così alla pag. 80 ove sono introdotti per la prima volta i predicati predicabili di sè stessi; questi si ripresentono a pag. 97 e 98, ed a pag. 101 e 102 sono collegati con le classi che contengono sè stesse come elemento. È chiaro che se la α classe del concetto contiene sè stessa come elemento, allora il giudizio costitutivo del concetto presenta il predicato predicabile di sè stesso: « l' *esser* α è α ». Per esempio: la bianchezza « (l' *esser bianco*) è bianca », « l' unità (l' *esser uno*) è una », ecc. Se analizziamo Il significato logico di questi giudizi che apparentemente presentano il predicato predicabile di sè stesso e che costituirono uno dei maggiori tormenti di Russell, troveremo che le proposizioni enunciate, se ad esse vogliamo dare un senso, esprimono l' innocentissimo principio d' identità. La bianchezza non è bianca precisameate come il concetto del *cavallo non ha quattro zampe.* Possiamo solo dire

che ogni cosa che soddisfi al criterio della bianchezza è bianca, « ogni cosa bianca è bianca », (ogni α è *un* α). Ma Russell dimentica, proprio nel punto giusto, la sua distinzione tra *meaning* e *denoting* e, come se niente fosse, mette al galoppo il *concetto del cavallo*, arrivando diritto diritto all' antinomia (pag. 102).

Sia w la classe delle classi che *non contengono se stesse come elemento*, e sia y un elemento qualsiasi di *w*; sia, inoltre w' la sottoclasse di *w* che rimane da w quando si esclude y. Allora y e w' esauriscono la classe w e perciò ogni elemento di w sarà un w' oppure y, ma se ogni elemento di w fosse w' la classe w' conterrebbe se stessa come elemento, dunque ogni elemento di w dovrà coincidere con y, cioè con ogni altro elemento di w. Ne segue, dice candidamente Russell, che una bicicletta è un cucchiaino da tè ed il cucchiaino da tè è una bicicletta. « This is plainly absurd, and any number of similar absurdities can be proved ». Ed in una sola pagina il nostro autore ne accumula altre tre.

Tutte queste assurdità sono eliminate se si osserva: 1°) che la classe di tutte le classi che non contengono se stesse come elemento ha per genere prossimo la classe di tutte le classi e perciò non può rappresentare un *concetto determinato* (n. 2, 7). 2°) che il principio del terzo escluso, come il principio di contraddizione, sono applicabili *solo* nel caso in cui si presentino concetti determinati e valgono solo se riferiti al genere prossimo di tali concetti (n. 3, 4). [1]

20. **Il paradosso logico di Lewis Carroll.**

Che per Russell la contraddizione tra α e non α si debba intendere in *modo assoluto*, risulta pure da un altro famoso paradosso che trovasi a pag. 18 dei " Principles ,, e che fu oggetto degli acuti strali di Poincarè: " una proposizione falsa implica ogni altra proposizione ,, Più chiaramente: " se *p* è una proposizione, *non-p* è equivalente all'asserzione che *p* implica tutte le proposizioni. Quì si vede che nello stesso tempo s' introduce la classe di tutte le proposizioni, che implica la considerazione della classe di tutte le classi, e s' interpreta la contraddizione *p-non p* in modo assoluto; doppia ragione per dichiarare un *non senso* il paradosso russelliano. In generale non è possibile evitare il non senso e l' assurdità ovunque ed in qualunque modo l'opposizione α—> non α venga presentata come assoluta.

---

[1] « Science et méthode » p. 173, 174.

Persino Hilbert nelle sue profonde ricerche sui principii della matematica (Math. Annalen. Volume 88) non potè superare le difficoltà logiche che si presentano nello studio dei fondamenti della scienza quando tutti i concetti non risultino perfettamente *determinati*. Egli *concentrò*, per così dire, tutte le difficollà nella sua funzione transfinita τ, ma non riuscì a superarle, come risulta dalle acute osservazioni in proposito, fatte da Michele Cipolla in una sua importante memoria [1].

Russell fu condotto al suo paradosso nella risoluzione di una difficoltà logica proposta da Lewis Carroll nella rivista "Mind,, (Nuova serie, N° 2, 1894). Si tratta di questo: " Tre persone Tizio, Sempronio, e Caio accudiscono alle faccende di un salone di barbiere; essi si danno il cambio in modo che sempre almeno uno dei tre si trovi in bottega. Si sa inoltre che Sempronio, essendo malaticcio, non può uscire se non accompagnato da Caio,,. Ora, *uncle Jim* cerca di dimostrare che Tizio dev'essere in ogni caso nel magazzino, con il seguente ragionamento: " Se Tizio è fuori, allora, se Sempronio è fuori, Caio, dev'essere in bottega; ma se Sempronio è fuori, Caio, che l'accompagna, dev'esser fuori, dunque Tizio dev'essere sempre in bottega,,. Traduciamo in simboli:

Tizio è fuori	proposizione p.
Sempronio è fuori	proposizione q.
Caio è fuori	proposizione r.

Intanto *q implica r* (se Sempronio è fuori, anche Caio è fuori). Se Tizio è fuori, dal fatto che Sempronio è fuori si deduce che Caio è dentro, cioè p implica che *q implica non r*. Se p fosse vera si avrebbe questo assurdo:

q implica r.
q implica *non* r.

dunque, dice Uncle Jim, p è falsa e Tizio non può essere mai fuori. Conclusione sbagliata, perchè se esaminiamo tutti i casi possibili e ricordiamo

---

[1] «Sui fondamenti logici della matematica secondo le recenti vedute di Hilbert» (Atti del XII Congresso della Società italiana per il progresso delle scienze Annali di Matematica 1924).

che, per le condizioni poste, almeno uno deve rimanere in bottega (*ma non si esclude che possano essere in bottega due o tutti e tre*) troviamo che se Tizio è fuori, poichè Sempronio non può uscire se non accompagnato da Caio, o restano Sempronio e Caio, oppure resta solo Sempronio aspettando che venga Tizio per rimanere in bottega e Caio per accompagnarlo fuori. La conclusione esatta é che *se p è vera , q è falsa.* E difatti se una proposizione *q* implica due proposizioni contradditorie *r* e *non r* essa deve essere falsa.

Non può però affermarsi che, reciprocamente, se una proposizione *q* è falsa essa implica *r* e *non r* cioè tutte le proposizioni (questo fu lo strano abbaglio di Russell). In quanto poi al significato di *non r*, questa proposizione non può intendersi come ogni altra proposizione *diversa* da r. Se *r* è la proposizione *falsa* «Il triangolo equilatero è *pure rettangolo*» *non r* non sarà ogni altra proposizione che mi venga in testa di enunciare (p. e. che la terra gira intorno al sole) ma semplicemente questa: Il triangolo equilatero *non può essere rettangolo* (principio della dimostrazione per assurdo).

21. **Antinomia di Russell.**

Diamo ora l' enunciazione chiara ed esplicita dell' antinomia russelliana:

Soggetto: La classe w di tutte le classi che non contengono se stesse come elemento.

TESI: *La* w *contiene se stessa come elemento.*

Sia la w costituita dagli elementi (α, α', ... λ, μ, ,..... λ' ...... μ' .....) nessuno dei quali sia nna classe contenente se stessa come elemento. Se la classe w non contenesse se stessa come elemento, dovrebbe coincidere con una delle α, α',..... λ,..... μ'..... perchè queste classi esauriscono la totalità di quelle che non contengono se stesse come elemento; supponiamo che w coincida con λ; allora w sarà formata da (α, α,'...... *w*, μ,..... λ'..... μ'....) e per conseguenza contiene se stessa come elemento, contro l' ipotesi.

Antitesi: *La w non contiene se stessa come elemento.*

Premessa la costituzione della classe *w*. che per ipotesi contiene *tutte e sole* le classi (α, α',.... λ, μ,..... λ',..... μ',.....) nessuna delle quali contiene se stessa come elemento, supponiamo che *w* contenga se stessa come elemento. Allora *w* dovrà essere una delle classi (α, α'..... λ..... μ'.....), per esempio μ', ma se *w* coincide con μ' essa non contiene se stessa come ele-

mento, dunque si giunge anche qui a contraddire l'ipotesi e quindi all'assurdo.

Ora quando in matematica, premessa una definizione A, si arriva a due proposizioni contraddittorie *p non p*, si conclude che i ragionamenti debbono essere errati, oppure che il concetto A non è determinato in modo che il suo significato permanga invariato nel processo logico; *non c'è altra ipotesi possibile.* Nel procedimento ora esposto errori logici non ve ne sono, dunque il concetto della *classe w* non è determinato in modo che resti soddisfatto il principio dell'invarianza del significato dei concetti. E difatti noi vediamo che nei due ragionamenti fatti nella tesi e nell'antitesi il significato di *w* muta automaticamente (come nei processi epimenidei); *se w non contiene se stessa come elemento deve contenere se stessa come elemento, e, viceversa: se w contiene se stessa come elemento, non deve contenere se stessa come elemento.* Appena cerchiamo di determinare il significato di *w* vediamo che questo si muta nel suo opposto. E dovevamo aspettarcelo: il concetto della classe di tutte le classi che non contengono se stesse come elemento non é logicamente *determinato* perchè *il suo genere prossimo é la classe di tutte le classi,* cioè l'assoluta totalità degli oggetti. Allora il principio dell'invarianza del significato dei concetti nel processo logico viene meno e cessa la validità di tutti i principi della logica presi in blocco.

22. I tentativi Russel e per trovare la soluzione dell'antinomia; dai « Principles... aï » Principia... [1]

Uno dei più formidabili capitoli dei « *Principles* » — è quello dedicato alla « Contraddizione ». Durante la discussione, molto interessante, dei vari modi di intendere l'antinomia, Russell intravede la necessità di escludere dalla logica la nozione dell'insieme di *tutti* gli oggetti e dell'insieme di tutti gl'insiemi, ma non si decide al gran passo perchè ritiene che escludendo quelle nozioni "*all formal truth would be impossible, and Mathematic would be abolished at one stroke* » [2] Ad ogni modo, non essendo riuscito a trovare la soluzione dell'antinomia, egli rimanda il seguito della ricerca all'appendice. Ed avrà un bel cercarla questa soluzione, fino a quando

---

[1] « Principles of Mathematics » Cambridge 1903; « Principia Mathematica » (Russell e Whitehead) Cambridge 1910.

[2] E' noto che Russell identifica matematica e logica, come identifica logica e metalogica.

resterà fermo nel suo proposito di non escludere dalla logica tutti quegli elementi che rendono impossibile la determinazione dei concetti. Ed infatti se esaminiamo il contenuto dell'appendice B troviamo iniziata una dottrina dei *tipi*, molto complicata, ma che già in certo modo rispecchia l'esigenza di abbandonare l'indeterminatezza del concetto *classe*. Alla fine poi (pag. 525) Russell stesso dichiara il suo completo insuccesso: The totality of alla logical objects, or of all propositions, « involves, il would seem, a fundamental logical difficulty; « what the complete solution of the difficulty may be, *I « have not succeeded in discovering;* but as it affects the very foundation of reasoning, I earnestly commend the study of it to the attention of all students of logic.

Nei « Principia » Russell ha perfezionato la sua teoria delle relazioni e dei tipi, includendo alcuni principi fondamentali di logica aristotelica trascurati prima, e così è riuscito a superare gli errori del paradosso di Lewis Carroll arrivando ad una giusta visione del principio della dimostrazione per assurdo, che mancava del tutto nei « Principles », ma non è riuscito a risolvere la sua antinomia, per quanto sia passato vicinissimo alla soluzione. Egli dice: (« Principia » pag. 66). « Se α è una classe, « il giudizio « α non è un elemento di α » è sempre privo di senso « (meaningless) e quindi non vi è senso nella frase « la classe delle classi « che non contengono se stesse come elemento » dunque la contraddi- « zione che risulta dal supporre che vi sia una classe siffatta, sparisce. » Ebbene, questa non è una soluzione dell' antinomia. L'esigenza di escludere dalla logica le proposizioni prive di senso è giustissima, ma Russell, per la confusione che fa tra α *classe* e *concetto* α prende uno strano abbaglio. Sia α la classe dei triangoli equilateri, che costituisce l' estensione del concetto del triangolo equilatero; dire che la classe dei triangoli equilateri *non è* un triangolo equilalero, significa dire che essa non soddisfa al criterio dei tre lati eguali, e non vi soddisfa appunto perchè non ha senso la frase: il concetto del triangolo equilatero ha i tre lati eguali, come non ha senso la frase: il concetto del cavallo ha quattro zampe. *La proposizione. « Se α è una classe α uon é un α » é tanto poco meaningless, che il suo significato* DETERMINA *il concetto corrispondente α come distinto dell'oggetto α*. Se poi si considera la classe di tutte le classi che non contengono se stesse come elemento (le quali esistono e sono precisamente quelle che corrispondono a concetti logicamente *determinati*) si ha un concetto non determinato in modo che il suo significato permanga nei processi lo-

gici, perchè il genere prossimo è la classe di tutte le classi, ed abbiamo anche visto il senso preciso dell' indeterminatezza.

La soluzione dell' antinomia russelliana è che essa è e rimane un' antinomia, ma appartiene ad un campo diverso da quello della logica formale - (pensiero determinato, nel suo *significato finito.*) Se il pensiero si vuole elevare dai concetti perfettamente determinati all' idea dell' assoluto (passaggio al *significato infinito* del pensiero) nella forma della totalità di oggetti o delle proposizioni, non può non incontrare un' antinomia fondamentale, chiara, semplice, in cui le due dimostrazioni per assurdo della tesi e dell' antitesi si presentano come assolutamente inattaccabili dal punto di vista della logica formale: *l' assoluto, qualunque sia la forma sotto la quale si presenta, non può pensarsi senza contraddizione.* È questo uno di quegli aspetti della *contraddizione reale* che ritroveremo nel trattare dello *infinito attuale.*

23. **La teoria delle relazioni esposta nei « Principia ».**

Nel N° 10 abbiamo ricordata la teoria russelliana delle relazioni per prendere da essa la sola terminologia; ora diremo perchè abbiamo messa completamente da parte questa imponente costruzione logica, che appare di un rigore perfetto. Il suo carattere di estrema complicazione e sottigliezza (terribilismo logico di Russell) non è una ragione per respingerla senz' altro.

Russell si proponeva tre scopi nel costruire la sua teoria: 1° spiegare l' antinomia 2° preparare il campo nel quale fosse possibile fondare una teoria dei nnmeri transfiniti 3° determinare con tutto il rigore logico il concetto del numero intero. Egli non arrivò a spiegare l' antinomia perchè non determinò con tutto rigore logico le condizioni necessarie e sufficienti perchè un concetto sia *definito.* In quanto alla teoria dei numeri transfiniti, comunque sia svolta la teoria delle relazioni e quali si siano i particolari, non può questa teoria puramente logica superare la *contraddizione reale* implicita nell' infinito in atto. Bisogna passare dal significato finito del concetto al significato infinito, determinando con tutto rigore la funzione del translato fuori del campo della logica formale (Vedi parte seconda di questo saggio). Resta solo a vedere se Russell è riuscito a dare il concetto di numero intero senza uscire dalla logica formale. Purtroppo anche quì si delinea il più completo insuccesso.

La sola determinazione del concetto di unità (da pag. 346 a pag. 347) tradotta in linguaggio comune occuperebbe un numero di pagine doppio di quella della presente monografia. Con tutto ciò l' idea espressa dalla parola *uno* non risulta nel suo vero significato perchè *questo è presupposto in ogni atto di pensiero*. Dire che *il numero 1 e la classe delle classi di un oggetto* non significa determinare un concetto, PERCHÈ IL SUO GENERE PROSSIMO SAREBBE LA CLASSE DI TUTTE LE CLASSI. La stessa osservazione può farsi riguardo alla definizione russelliana del numero intero *n* (il numero di una classe è la classe di tutte le classi che possono porsi in corrispondenza binnivoca con la prima,,). È non c' è neanche bisogno di ricorrere al nostro *criterio di determinazione* per convincersi della insufficienza logica del concetto russelliano di numero. Supponiamo già svolta la teoria più completa possibile della corrispondenza biunivoca delle classi; si sarà così determinato il concetto di *eguaglianza* tra numeri, ma il numero non è venuto ancora fuori, perchè è ancora nascosta *l' operazione* che dà luogo ad esso. Per dimostrare questo mi servo di un esempio banale.

Il professore distribuisce dei foglietti agli alunni di una classe, uno per ciascuno alunno; egli può distribuirli pensando ad altro, oppure cantando mentalmente un motivo musicale di cui ogni nota corrisponda ad un foglietto. Esauriti i foglietti in modo che ogni alunno abbia avuto il suo; nel primo caso, alla domanda " quanti sono gli alunni? egli risponderà: « non lo so; ma gli alunni sono tanti quanti sono i foglietti ». Nel secondo caso egli potrà rispondere, p. e. cantando « la donna è mobile..... ».

Invece del canto, adoperate delle parole esprimenti lo stesso processo di distinzione ed unificazione implicito nel tema musicale ed avrete il NUMERO.

In una sua recente opera [1] Russell ripresenta la sua teoria aggiungendo una critica alla teoria di Peano. Anche in questo dobbiamo mostrare tutto il nostro dissenso. A Peano ed alla sua scuola si deve la prima formulazione del sistema completo dei principii dell' aritmetica e noi abbiamo affermato (e dimostreremo in seguito) che la definizione del sistema completo è la condizione necessaria e sufficiente per la determinatezza logica dei concetti di una teoria scientifica. Il tentativo Russelliano di dare il sistema dei concetti primitivi della logica è svalutato dal triplice insuccesso or ora ricordato e dall' errore finale dell' identificazione di logica e matematica.

---

[1] « Introduction à la philosophie mathématique » 1928 traduzione di G. Moreau.

24. Logica e metalogica.

Riassumo brevemente il risultato della mia ricerca.

Un concetto è *determinato* quando il suo significato rimane *invariante* nel discorso (condizione dell'intelligibilità del linguaggio). Questa invarianza del significato dei concetti nei processi logici si esprime nei principii della logica formale (præambula logicæ). Le condizioni di determinatezza dei concetti sono: 1° Che l'opposizione α, non-α venga intesa nel genere prossimo del concetto α (esclusione dei concetti il cui genere prossimo sia la classe di tutte le classi). 2° Che la α classe del concetto venga distinta da *ogni* α. Si sottopongono al criterio C (α) solo gli oggetti per i quali l'applicazione del criterio abbia *un senso*. Però la α classe stessa si deve considerare a parte. La non applicabilità del criterio C (α) alla α classe ha un senso nella distinzione originaria tra il *concetto* e l'oggetto corrispondente. Il concetto del cavallo non ha quattro zampe! (esclusione delle classi che contengono sè stesse come elemento).

Le condizioni di determinatezza dei giudizi, o relazione tra i concetti, sono: 1° Che sia determinato il predicato con significato distribuitivo rispetto al soggetto (applicabilità del principio *de omni et nullo*).

2° Che sia determinato il significato implicativo dei giudizi (riduzione alle forme tipiche di Aristotele).

Vedremo, nel capitolo seguente, che queste condizioni sono sufficienti a determinare il significato della coerenza dei processi della logica formale e del criterio della non-contraddizione.

Ma nel fare la sintesi della logica formale già si mostra l'esigenza di andare al di là.

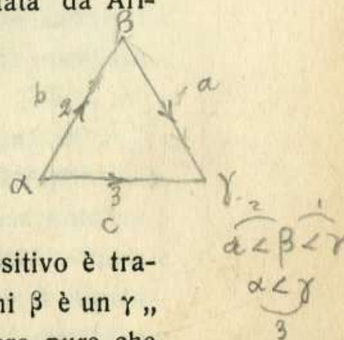
Noi diremo brevemente che nella logica formale i concetti sono determinati nel loro *significato finito*. L'esigenza di passare dal significato finito al significato infinito viene dalla necessità di superare la contraddizione reale e si mostra nella costruzione della scienza e nella speculazione filosofica. I concetti non perfettamente determinati, ma che hanno un *significato dinamico*, sono l'oggetto della *metalogica*. Questa va intesa non come raccolta di episodi di logica divertente (i giudizi epimenidei e simili) ma come *logica speculativa*. Per comprendere ciò basta paragonare il processo epimenideo dell'antinomia di Russell con la dialettica hegeliana.

CAPITOLO 2.°

IL RAGIONAMENTO ; CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI DELLA COERENZA DI UN PROCESSO LOGICO

25. Preliminari sul sillogismo.

La forma tipica più semplice dell' *implicazione* fu presentata da Aristotele così :



Ogni β è un γ
Ogni α è un β (1)
Dunque : Ogni α è un γ

In questo processo logico (*sillogismo*) il valore verità positivo è trasferito dalle due premesse alla conclusione. Se è vero che " ogni β è un γ „ (prop. *a*), ed è vero che " ogni α è un β „ (prop. *b*), sarà vero pure che " Ogni α è un γ „ (prop. *c*). Si dirà che le prop. *a*, *b* *implicano* la prop. *c*, oppure che la " *b implica* la *c* in virtù di *a* „ oppure che " dalle prop. *a*, *b* si *deduce* *c* „ ; da *b* si deduce *c* in virtù di *a*.

Sillogismo in generale è ogni processo logico nel quale dalla relazione di due concetti α, γ con un terzo β si trae una relazione dei concetti α, γ tra di loro.

Il soggetto α della conclusione si chiama *termine minore* del sillogismo, il predicato γ *termine maggiore*, il termine β col quale si confrontano tanto il maggiore quanto il minore è il *termine medio* del sillogismo. Delle tre proposizioni del sillogismo, quella i cui termini sono il maggiore ed il medio dicesi *la maggiore* (ogni β è un γ) e quella i cui termini sono il minore ed il medio dicesi *la minore* (ogni α è un β).

Il sillogismo dicesi di *1. figura* se, come in (1), *il termine medio è soggetto della maggiore e predicato della minore.*

Per dimostrare la validità del sillogismo bisogna far vedere che il *valore verità* si trasmette dalle premesse alla conclusione, senza che intervengano altre proposizioni. Per evitare il circolo vizioso di dimostrare con sillogismi la validità del sillogismo, la giustificazione deve avere la sola garanzia dei principi della logica, ed, in ultima analisi, del criterio della testimonianza.

Validità del sillogismo (1) La *minore* " ogni α è un β „ significa che se la proposizione " x è un α „ è vera, sarà pure vera la proposizione " x è un β „. Allora la prop. " x è un β è vera, ma per la *maggiore* „ ogni β è un γ " dunque sarà vera anche l'altra proposizione „ x è un γ " Si conclude che ogni α è un γ „.

In questa giustificazione abbiamo continuamente applicato il principio della conservazione del significato dei concetti nel processo logico, sotto la forma esplicita del principio *de omni et nullo* (significato distribuitivo del predicato rispetto al soggetto).

26. **Implicazioni immediate.**

Implicazioni immediata è quella in cui si deduce una proposizioue da un' altra senza ricorrere ad una terza. Es: 1° Ogni α è un β « implica la prop. » Alcuni α sono β, (subalternazione *delle proposizioni col soggetto plurale logico*). Infatti, se ogni α è un β, per il significato distribuitivo del predicato β rispetto ad α, β si può predicare di tutti gli α e di ognuno di essi, e perciò « alcuni α sono β ».

Es: 2° Ogni α è un β implica la prop. « Nessun non β è α (contrapposizione). Infatti, se un non β, p. e. x fosse α, allora *questo x*, in quanto è un α dovrà pure essere un β ed il concetto β non sarebbe determinato, cioè il suo significato non sarebbe invariante nel processo logico.

Dunque « nessun non β è α »

Es: 3° *Inversione dei giudizi.* Se in un giudizio s'invertono soggetto e predicato si ha la proposizione inversa. Ci domandiamo ora se i giudizi dei tipi A, E, I, O sono invertibili, cioè se questi giudizi *implicano immediatamente* i loro inversi.

Le proposizioni del tipo E, I sono senz'altro invertibili. « Nessun α è un β, dunque « nessun β è un α » perchè se qualche β (p. e x) fosse un α, x sarebbe *un α che è β*.

« Qualche α è un β » dunque « qualche β è un α » perchè se x è *un α che è un β* questo stesso x sarà un β ed un α (cioè qualche β è un α).

Le proposizioni del tipo O non implicano immediatamente l'inversa. « Se qualche α non è β » non si può dire che « qualche β non è α » solo *vi formae.* « Qualche poligono inscrittibile non è regolare » (prop. vera) « Qualche poligono regolare non è inscrittibile (prop. falsa). In generale, sia x quell' α che non è β; allora dei β non si può nulla affermare: può darsi che tutti i β siano α, come nell' esempio, oppure che alcuni α siano β

ed altri non siano β come nell' esempio seguente: « Qualche numero dispari non è primo » Quì sussiste l' inverso « Qualche numero primo non è disparì » (infatti 2 è primo ed è pari). La possibilità di invertire la proposizione « Qualche α non è un β » dipende dunque dalle particolarità della classe degli α *che non sono* β e quindi può affermarsi solo *vi materiae* e mai come implicazione immediata.

Le proposizioni del tipo A non implicano immediatamente l' inversa ».

Ogni α è un β, non implica immediatamente l' inversa». Ogni β è un α, ma una proposizione del tipo *I*: « qualche β è un α ». Infatti, sia x un α' allora *x sarà un* β; di questo *x che é un* β può dunque dirsi: *è un* α, e perciò « qualche β è un α ». Per poter dire « ogni β è un α » bisogna conoscere altre proposizioni, dipendenti dal contenuto concreto dei concetti α, β e per cui si possa affermare la loro *equivalenza*. Ma nella logica formale le classi vanno considerate *in fieri*, come sono effettivamente in ogni ricerca scientifica concreta, e perciò bisogna tener presente non l' estensione delle classi, ma la comprensione dei concetti.

Tutte le deduzioni immediate di cui ora abbiamo discorso sono, come i principii fondamentali della logica, implicite nell' unico principio della conservazione del significato dei concetti nel discorso. Il *valore verità* rimane invariante dalla premessa alla conclusione perchè *ogni dubbio in proposito equivarrebbe a negare l' attività del pensiero nel momento stesso la si esercita di fatto*. L' analisi che faremo del sillogismo e del ragionamento è unicamente fondata su questo principio, al quale ci riferiremo tacitamente in seguito per evitare la ripetizione continua di cose già dette.

Alcuni filosofi come *Ramus* (« Animadversiones aristotelicae » libro 17), *Leibniz* (« Nouveaux essais, libro 4° cap. 2° »), *Conturat* (La logique de Leibniz p. 9 e 10), e recentemente *Lachelier* (« Etudes sur le syllogisme » Paris 1907 p. 1-15) hanno creduto di poter dimostrare le implicazioni immediate con sillogismi. Per esempio, essi deducono dalla prop. « Ogni α è β » l' altra proposizione « Qualche α è β, per mezzo del sillogismo

Ogni α è β
Qualche α è α
Dunque; Qualche α è β

Per evitare il circolo vizioso, che consisterebbe nel dimostrare per sillogismi la validità del sillogismo, bisognerebbe ammettere come immedia-

tamenre evidente la costruzione del sillogismo ed il trasferimento del valore verità dalle premesse alla conclusione, due cose che richiedono il sistema dei *praeambula logicae* già formato con tutte le dovute cautele. Chi ignorasse questi principii non potrebbe distinguere una terna conclusiva di giudizi da uno pseudo sillogismo. Lo stesso Leibnitz commise questo stranissimo errore (v. Couturat, op. citata pag. 10): «Ogni A è A», «Qualche A non è B», dunque «Qualche B non è A». Cioè: «Alcune figure non sono cerchi», dunque alcuni cerchi non sono figure».

27. **Le quattro figure del sillogismo.**

Considerando il termine medio quale soggetto o predicato, quattro casi sono possibili: 1° β è *soggetto della maggiore e predicato della minore* (1ª figura, es. n° 25).

2° β *ò predicato dulla maggiore e della minore.* (2ª figura) Esempio:

Nessun γ è un β
Ogni α è un β (2)
Dunque: Nessun α è un γ

VALIDITÀ. Supponiamo che un α (*p. e. x*) sia un γ, allora, se è vero che nessun γ è un β, x non può essere un β. Ma la proposizione «ogni α è un β» è vera, dunque quell' x sarebbe un β e non sarebbe un β.

3° β *è soggetto della maggiore e della minore* (3ª figura). Esempio:

Ogni β è un γ
Ogni β è un α (3)
Dunque: Qualche α è un γ

VALIDITÀ, Se «x è un β» è una proposizione vera, anche l' altra «*x è un* γ» sarà vera (per la maggiore) ed ancora sarà vera la terza proposizione «x é un α» (per la minore). Dunque di questo *x che è un* α si può pure affermare *che è un* γ e perciò «qualche α è un γ»,

4° β è predicato della maggiore e soggetto della minore (4 figura). Esempio:

Nessun γ è β
Ogni β è α
Dunque: Qualche α non è γ.

VALIDITÀ. Se la proposizione «x è un β» è vera, sarà pure vera la prop. «x è un α» (per la minore) Per la maggiore poi si può affermare che *quell'x che è* β, non è un γ, altrimenti vi sarebbe un γ che sarebbe β. Si conclude che quell' *x che è un* α non è un γ, cioè: «Qualche α non è γ.

La quarta figura pare sia stata introdotta da Galeno. Parecchi trattatisti e filosofi non l'accolsero ritenendola difettosa, non perchè la conclusione sia formalmente errata, ma perchè la forma del ragionamento è artificiosa e contorta. Vi furono però dei difensori, per esempio Leibniz, che dichiara la quarta figura «aeque bona ac ipsa prima» Di tale opinione non fu Kant [1] che ritenne raziocini ibridi quelli che si presentano in 2ª. 3ª e 4ª, figura perchè per la conclusione si adoperano quattro o cinque giudizi invece di tre, considerando come giudizi *aggiunti* la *conversa* [2] della maggiore e della minore.

Le difficoltà e le sottigliezze prospettate da Kant si hanno quando il predicato si considera *nominalisticamente,* cioè quando i *generi* si considerano come *note* da attribuirsi al soggetto. Allora il *dictum de omni et nullo* assume questa forma ibrida: «nota notae est etiam nota rei ipsius; repugnans notae repugnat rei ipsi» e sorge la necessità della conversione delle proposizioni nelle figure seconda, terza e quarta. Di tale conversione non v'è traccia nelle dimostrazioni da noi date della validità delle quattro figure di sillogismo, dimostrazioni nelle quali è applicato soltanto il principio *immanente* dell'invarianza del significato dei concetti, sotto la forma del principio de *omni et nullo* inteso nella sua forma genuina (cioè tenendo presente il *significato del concetto* e non il puro *nome*).

28. Inizio della discussione di tutte le possibili forme di sillogismi.

Indicheremo sempre con α il *termine maggiore,* con γ il minore e con β il medio. Delle due premesse porremo sempre al 1° posfo la *maggiore* (relazione tra β e γ) ed al 2° posto la *minore* (relazione tra α e β); la

---

[1] «*La falsa sottigliezza delle quattro figure sillogistiche* «(tra le opere del periodo precritico (1862) e «Logica» posteriore alle tre «Critiche»

[2] La *conversa* di una proposizione è *l'inversa* per i tipi E ed I, oppure la proposizione «qualche β é α» nel tipo A,

conclusione è una relazione tra α e γ nella quale il soggetto è α. Secondo il posto del termine medio β nelle premesse, solo 4 casi sono possibili.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} 1^a \text{ figura}; \begin{pmatrix} \gamma & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} 2^a \text{ figura}; \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} 3^a \text{ figura}; \begin{pmatrix} \gamma & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} 4^a \text{ figura}.$$

Le tre proposizioni del sillogismo possono essere dei tipi A, E, I, O; i sillogismi (1), (2), (3), (4) dei numeri 25, 27, saranno perciò indicati con i simboli A A A, E A E, A A I, E A O (modi del sillogismo).

Per trovare tutti i possibili sillogismi bisogna cercare tutte le possibili terne che si possono formare con i 4 elementi A, E, I, O tenendo conto pure dell'ordine. Ora, le possibili disposizioni con ripetizione di 4 elementi a 3 a 3 sono 64; bisogna vedere di queste disposizioni quali corrispondono ad un sillogismo concludente in una delle 4 figure.

Il criterio di selezione da noi prescelto è dato dal fatto che fissate le due premesse e fissata la figura del sillogismo, resta determinata la conclusione, oppure provata l'impossibilità di concludere. Ci occuperemo dunque di tutte le possibili coppie formate con elementi A, E, I, O. Dimostriamo innanzi tutto che «non si può concludere nè con due premesse negative, nè con due premesse particolari, nè con la maggiore particolare affermativa e la minore universale negativa», cioè che bisogna scartare le coppie E E, E O, O E, O O, I I, I O, OI, I E.

29. **Eliminazione della coppia E E.**

Dalle due premesse universali negative: «nessun β è γ» e «nessun α è β» non si può trarre nessuna conclusione *vi formae*, cioè indipendentemente da altre relazioni tra α, β γ date dal contenuto (*vi materiae*). Può darsi che nessun α sia γ (nessun circolo è quadrato, nessun triangolo è circolo; nessun triangolo è quadrato), oppure che tutti gli α siano γ (nessun circolo è rombo, nessun quadrato è circolo; ogni quadrato è rombo). La conclusione nei due esempi è valida solo *vi materiae*.

Siccome la E si può senz'altro invertire (N° 26), il ragionamento fatto per la 1ª figura vale per tutte le altre figure, che si ottengono dalla prima con l'inversione della maggiore, della minore o di tutte e due.

Su questa quistione semplicissima sono corsi fiumi d'inchiostro. Cominciò *Jevons* (Principles of Science 2ª ed. pag. 63) a dichiarar falsa in generale la regola che da due premesse negative nulla si può concludere

e portò questo esempio: « Nessun corpo che non sia metallo è capace d'influenza magnetica, ma il carbone non è metallo, dunque il carbone non è capace di influenza magnetica. Conclusione valida *vi formae* e dedotta dice Jevons, da due premesse negative, *Uberweg* trattò lungamente la quistione e dimostrò che essa era stata già risoluta dai logici e specialmente nella logica di Port Royal: la negazione si riferisce al termine medio β e quindi la proposizione é affermativa come « α è non β ». Lo strano è che lo stesso Jevons aveva già data questa risoluzione della difficoltà nel suo libro: Elementary Lessons in Logic pag. 134. Ma Bradley nei suoi « Principles of Logic » pag. 254, ripresenta l' obbiezione di Jevons in questa forma: « A non è B; ciò che non è B non è C, dunque A non è C » e dice che il mutare una delle premesse da negativa ad affermativa (da « A non è B » ad A è *non B*) aggiunge un quarto termine al sillogismo. La risposta può darsi solo se si tenga presente il significato di β e non β nel concetto. Se io dico A *non è* B, A può intendersi come qualunque cosa *diversa da B*; se dico A è un *non B*, poichè *non B* va inteso nel genere prossimo di B, anche A va inteso allo stesso modo (ad es: se B è triangolo equilatero, non B è *triangolo* non equilatero). Solo se « A non è B » s' intende come « A è *non B* » si può concludere. Se s' intende nell' altro modo le due premesse sono veramente negative: l' una dice che se *x* è un A esso è diverso da B e l' altra dice che lo stesso x è diverso da C e non si può concludere *vi formæ* nè che x è un C, nè che x non è C.

Nel I. capitolo abbiamo determinati i principî della logica con tutte le cautele che pongono la nostra analisi del sillogismo al riparo di tutte le obbiezioni che spesso si sono presentate nei trattati di logica e nelle opere di critica nella logica formale.

30. Esclusione della coppia E O.

" Se nessun β è γ „ e " qualche α non è β non si può concludere *vi formae*, ma *vi materiae*, cioè solo se si conoscono altre determinazioni di α, β, γ. Infatti, in alcuni casi si può concludere che „ qualche α non è γ (nessun triangolo equilatero è triangolo rettangolo, qualche triangolo isoscele non è equilatero; qualche triangolo isoscele non è triangolo rettangolo) ed in altri casi che " nessun α è γ „. (Nessun quadrato è triangolo equilatero, qualche rettangolo non è quadrato; nessun rettangolo è triangolo equilatero).

È egualmente facile vedere che con la coppia iniziale E O non si può concludere nè in 2ª nè in 3ª nè in 4ª figura.

31. **Esclusione delle coppie O E, O O.**

Se qualche β non è γ „ e " nessun α è β " si può concludere solo *vi materiae* che " nessun α è un γ„. (Qualche triangolo isoscele non è triangolo equilatero, nessun quadrato è triangolo isoscele ; nessun quadrato è triangolo equilatero), oppure che " tutti gli α sono γ „ (Qualche triangolo rettangolo non è isoscele, nessun triangolo equilatero è rettangolo ; tutti i triangoli equilateri sono isosceli) Facilmente si vede che con la coppia iniziale O E non si conclude nemmeno nelle altre figure.

Se " qualche β non è γ „ è " qualche α non è β „ si può concludere, sia che " qualche α è γ „. (Qualche rettangolo non è quadrato, qualche parallelogrammo non è rettangolo ; qualche parallelogrammo non è quadrato), sia che. " Nessun α è γ „. (Qualche numero primo non è dispari ; qualche potenza di due non è numero primo, nessuna potenza di due è dispari.) Analogo procedimento in 2ª, 3ª e 4ª figura.

32. **Esclusione delle coppie I I, I O, ed O I.**

Se " qualche β è γ „ e " qualche α è β „ si può concludere sia che " qualche α è γ „ (Qualche parallelogrammo è quadrato, qualche quadrilatero è parallelogrammo; qualche quadrilatero è quadrato) sia che " nessun α è γ „. (Qualche triangolo isoscele è equilatero, qualche triangolo rettangolo è isoscele ; nessun triangolo rettangolo è equilatero) Siccome le proposizioni del tipo I sono invertibili, il ragionamento fatto per la I figura vale anche per le altre.

Se « qualche β è γ » e « qualcne α non è β » si può concludere sia che « qualche α è γ » (Qualche parallelogrammo è inscrittibile, qualche quadrilatero non è parallelogramma ; qualche quadrilatero è inscrittibile), sia che « nessun α è γ » (Qualche triangolo isoscele è equilatero, qualche triangolo rettangolo non è isoscele, nessun triangolo retfangolo è equilatero). Analogamente per la 2ª, 3ª e 4ª figura.

Se « qualche β non è γ » e « qualche α è β » si può concludere come sopra.

33. **Esclusione della coppia I E.**

Se «qualche β è γ» e «nessun α è β, si può concludere sia che «ogni α è γ» (Qualche triangolo rettangolo è isoscele, nessun triangolo equilatero è rettangolo, ogni triangolo equilatero è isoscele), sia che «nessun α e γ« (Qualche triangolo isoscele è equilatero, nessun triangolo scaleno è isoscele; nessun triangolo scaleno è equilatero).

Poichè le proposizioni del tipo I, E, sono invertibili, il ragionamento fatto per la 1ª figura si estende alle altre.

Concludiamo, dopo ciò che le coppie iniziali possiblili per un sillogismo valido sono le seguenti otto: AA, AE, AI, AO, EA, EI, IA, OA.

34. **Sillogismi con la coppia iniziale A A.**

I sillogismi che cominciano con la A A si iniziano così:

Ogni β è γ	Ogni γ è β	Ogni β è γ	Ogni γ è β
Ogni α è β	Ogni α è β	Ogni β è α	Ogni β è α

In 1ª figura si conclude, come già vedemmo, con A (ogni α é un γ).

In seconda figura non si può concludere nulla perchè per ogni x che sia α si può dire «x è β» e solo se si sa che tutti i β sono γ si può affermare «x è un γ» Se invece si sa che ogni γ è β non si può nulla affermare per gli x; questi potrebbero essere tutti dei γ, oppure nessuno degli x potrebbe essere γ. Così: «ogni triangolo scaleno è inscrittibile, ogni poligono regolare è inscrittibile, nessun poligono regolare è triangolo scaleno Invece: «Ogni poligono regolare è inscrittibile, ogni quadrato è inscrittibile, ogni quadrato è poligono regolare».

In terza figura si può concludere con I: «alcuni α sono γ». Infatti invertendo la maggiore si ha: «qualche γ è β» ma «tutti i β sono α» dunque: «qualche α è un γ». In quarta figura: «ogni γ è β» ma «ogni β è α» dunque: «ogni γ è α» ed invertendo: «qualche α è γ». Dunque anche in 4ª figura si può concludere con I.

Risultano le prime due regole sillogistiche:

Se le premesse sono entrambe universali affermative, la conclusione non può essere negativa, ed il sillogismo conclude in 1ª, 3ª e 4ª figura dando rispettivamente i modi A A A, A A I (3ª figura) ed A A I (4ª figura).

35. Sillogismi con la coppia iniziale A E.

Le premesse possono essere:

Ogni β è γ	Ogni γ è β	Ogni β è γ	Ogni γ è β
Nessun α è β	Nessun α è β	Nessun β è α	Nessun β è α

Siccome la proposizione universale negativa è invertibile (n.° 26) in 1ª e 3ª figura abbiamo le stesse premesse, dalle quali nulla si può concludere, perchè se «ogni β è γ» e «nessun α è β» si può, secondo i casi, affermare sia che «nessun α è γ» (Ogni rettangolo è parallelogramma, nessun triangolo è un rettangolo, nessun triangolo è parallelogrammo), sia che «tutti gli α sono γ» (Ogni triangolo rettangolo è inscrittibile, nessun triangolo equilatero è rettangolo, ; tutti i triangoli equilateri sono inscrittibili). In 2ª e 4ª figura si può concludere solo che «nessun α è un γ» perchè per la minore «nessun α è β» e per la maggiore «ogni γ è β.

Si deducono così le altre due regole:

Se la maggiore è universale affermativa e la minore universale negativa, la conclusione può solo essere universale negativa, ed il sillogismo conclude in 2ª e 4ª figura dando i modi: A E E (2ª figura). ed A E E (4ª figura).

36. Sillogismi con la coppia iniziale AI.

Premesse:

Ogni β è γ	Ogni γ è β	Ogni β è γ	Ogni γ è β
Qualche α è β	Qualche α è β	Qualche β è α	Qualche β è α

Se alcun β sono α, si ha pure che alcuni α sono β (N. 26), dunque in 2ª e 4ª figura si hanno le stesse premesse che non possono condurre ad alcuna conclusione, poichè se «ogni γ è β» ed «alcuni α sono β» si può affermare che «nessun α è γ» (Ogni triangolo equilatero è isoscele, qualche triangolo rettangolo è isoscele; nessun triangolo equilatero è rettangolo) *oppure che* «qualche α è γ» (Ogni quadrato è parallelogrammo, qualche quadrilatero è parallelogrammo; qualche quadrilatero è quadrato).

In 2ª e 3ª figura si conclude che «alcuni α sono γ» Infatti se alcuni α sono β ed ogni β è γ, risulta che alcuni α sono γ.

Se la maggiore è universale affermativa e la minore é particolare affermativa la conclusione può essere solo particolare affermativa ed il sillogismo conclude solo in 1ª e 3ª figura dando i modi: A I I, (1ª figura) ed A I I (3ª figura).

37. **Sillogismi con la coppia iniziale A O.**

Premesse:

Ogni β è γ	Ogni γ è β	Ogni β è γ	Ogni γ è β
Qualche α non è β	Qualche α non è β	Qualche β non è α	Qualche β non è α

In 1ª figura non si può concludere: se ogni β è γ e qualche α non è β può darsi che tutti gli α siano γ (Ogni quadrato è parallelogrammo, qualche rettangolo non è quadrato; tutti i rettangoli sono parallelogrammi) oppure che alcuni α non siano γ (Ogni quadrato è parallelogrammo, qualche quadrilatero non è quadrato, alcuni quadrilateri non sono parallelogrammi).

Analogamente in 4ª figura: se ogni γ è β e qualche β non è α, può darsi che «tutti gli α siano γ» (Ogni rettangolo è parallelogrammo, qualche parallelogramma non è quadrato; tutti i quadrati sono rettangoli) oppure che «alcuni α siano γ» (Ogni poligono regolare è inscrittibile, qualche poligono inscrittibile non è quadrilatero; qualche quadrilatero non è poligono regolare).

In 3ª figura: «qualche β non è α» ma «ogni β é γ» dunque «qualche γ non è α» Questa è la conclusione incondizionatamente valida ma in essa il soggetto non è α, e siccome la proposizione particolare negativa non è in alcun modo invertibile (N. 26) si potrà dire che qualche α non è γ, oppure che tutti gli α sono γ. Dunque con AO non si conclude in 3 figura.

In 2. figura si conclude che «alcuni α non sono γ» perchè, per la minore: «alcuni α non sono β» e per la maggiore «ogni γ è β».

Se la maggiore affermativa e la minore é particolare negativa, la conclusione può solo essere particolare negativa ed il sillagismo é valido solo in 2ª figura (A O O)

38. **Sillagismi con la coppia iniziale E A.**

Le premesse sono:

Nessun β è γ	Nessun γ è β	Nessun β è γ	Nessun γ è β
Ogni α è β	Ogni α è β	Ogni β è α	Ogni β è α

Basterà occuparsi della 1ª e 3ª figura perchè la *maggiore* universale negativa è senz' altro invertibile: la 2ª figura si converte nella 1ª e la 4ª nella 3ª In 1ª (e 2ª) figura; « ogni α è un β » ma « nessun β è γ » dunque: « nessun α è γ » In 3ª (e 4ª) figura invertendo la minore si ha che « alcuni α sono β (N° 26), ma nessun β è γ, dunque « qualche α non è γ »

Se la maggiore è universale negativa e la minore è universale affermativa la conclusione è universale negativa o particolare negativa ed il sillogismo conclude in tutte e 4 le figure: E A E 1ª e 2ª figura, E A O 3ª e 4a figura.

39. **Sillogismi con la coppia iniziale E I.**

Le premesse sono:

Nessun β è γ	Nessun γ è β	Nessun β è γ	Nessun γ è β
Qualche α é β	Qualche α è β	Qualche β è α	Qual«he β è α

In 1ª figura: « qualche α è β » ma « nessun β è γ » dunque: « qualche α non e γ » La stessa conclusione si ha nelle altre tre figure, che si convertono nella prima, la 2ª con l' inversione della maggiore, la 3ª con la conversione della minore e la 4ª con la conversione di entrambe le premesse.

Se la maggiore è universale negativa e la minore è particolare affermativa, la conclusione è particolare negativa ed ha luogo in tutte e quattro le figure. (E I O).

40. **Sillogismi con la coppia iniziale I A.**

Le premesse sono:

Qualche β è α	Qualche γ è β	Qualche β è γ	Qualche γ è β
Ogni α è β	Ogni α è β	Ogni β è α	Ogni β è α

Con l' inversione della maggiore la 2ª figura si converte nella 1ª e la 4ª nella 3ª In 1ª (e 2ª) figura, se ogni α è β ed alcuni β sono γ, può essere

che nessun α sia γ (Qualche poligono inscrittibile è regolare, ogni triangolo scaleno è inscrittibile; nessun triangolo scaleno è poligono regolare) ma può essere pure che ogni α sia γ (Qualche quadrilatero è inscrittibile, ogni quadrato è quadrilatero; ogni quadrato è inscrittibile).

In 3ª (e 4ª) figura: ogni β è α, ma qualche β è γ, dunque: qualche α è γ»

Se la maggiore è particolare affermativa e la minore è universale affermativa, la conclusione è particolare affermativa ed ha luogo in 3ª e 4ª figura (IAI).

41. **Sillogismi con la coppia iniziale O A.**

Le premesse sono:

Qualche β non è γ	Qualche γ non è β	Qualche β non è γ	Qualche γ non è β
Ogni α è β	Ogni α è β	Ogni β è α	Ogni β è α

Se ogni α è β e qualche β non è γ (ossia, anche, qualche γ non è β) può darsi che ogni α sia γ, oppure che nessun α sia γ (Ogni triangolo equilatero è isoscele. qualche triangolo isoscele non è rettangolo; nessun triangolo equilatero è rettangolo; ma si ha pure: ogni triangolo equilatero è isoscele, qualche triangolo isoscele non è equiangolo; ogni triangolo equilatero è equiangolo.) Non si conclude perciò in 1ª e 2ª figura.

Non si conclude nemmeno in 4ª figura: «ogni β è α, e «qualche γ non è β» può affermarsi sia che «ogni α è γ» sia che «nessun α è γ» (Ogni quadrato è rettangolo, qualche parallelogrammo non è quadrato; tutti i rettangoli sono parallelogrammi; ma si ha pure: ogni triangolo equiangolo è un triangolo equilatero, qualche triangolo rettangolo non è triangolo equiangolo, nessun triangolo equilatero è rettangolo).

Resta la 3ª figura. Se «ogni β è un α» e «qualche β non è γ» si conclude che «qualche α non è γ.».

Se la maggiore è particolare negativa e la minore universale affermativa, la conclusione è particolare negativa ed ha luogo solo in 3ª figura (O A O).

42. **Conclusione dell' analisi dei sillogismi.**

Avendo esaminati tutti i casi possibili in cui dalla maggiore e dalla minore si può trarre una conclusione *incondizionatamente valida*, possiamo affermare che:

I sillogismi formalmente corretti sono in numero di 19; essi possono presentarsi in 10 modi: AAA, AAI, AEE, AII, AOO, EAE, EIO, EAO, IAI, OAO, così distribuiti.

In 1ª figura, 4 modi:

A A A (*Barbara*) E A E (*Celarent*)
A I I (*Darii*) E I O (*Ferio*)

In 2ª figura, 4 modi:

A E E (*Camestres*) E A E (*Cesare*)
A O O (*Baroco*) E I O (*Festino*)

In 3ª figura, 6 modi:

A A I (*Darapti*) E I O (Ferison)
A I I (*Datisi*) I A I (Disamis)
E A O (*Felapton*) O A O (Bocardo)

In 4ª figura: 5 modi:

A A I (Baralipton) E A O (Fespamo)
A E E (Camentes) E I O (Fresisomorum)
I A I (Dimatis)

43. **Risoluzione del problema della logica formale.**

Se un ragionamento qualsiasi può porsi sotto la forma di un aggregato di sillogismi collegati tra di loro, *esso è formalmente valido* nel senso che il *valore verità si conserva*, e dalle premesse viene trasferito a tutte le altre proposizioni del processo. Ciò risulta dall'analisi precedentemente compiuta di tutte le possibili forme di sillogismi validi.

Bisogna dimostrare ora che, reciprocamente, ogni ragionamento valldo *vi formæ* può porsi sotto la forma di un aggregato connesso di sillogismi, *con la sola esclusione dei processi logici giustificativi del sillogismo stesso.* Perciò distinguiamo l'implicazione immediata dalla mediata.

I tre principii fondamentali della logica e tutti i preamboli della logica risultano, per *implicazione immediata* dal principio della conservazione del significato dei concetti nel linguaggio.

La validità di tale principio è garentita, in ultima analisi, dal *criterio della testimonianza* (cap. 1°,) *Tutto* il sistema dei *praeambula logicæ* conduce poi alla determinazione di tutte le forme possibili di sillogismi conclusivi, cioè delle più semplici *implicazioni mediate.* Se ora consideriamo un' implicazione mediata quale si presenta effeftivamente nei processi logici delle scienze speciali, osserveremo che mai si fa uso esplicito del sillogismo (vedi ad es: il 1° libro di Euclide) e che la conservazione del valore verità delle premesse alla conclusione è garantita da implicazioni mediate che consistono nel *dedurre* da una proposizione *a* un' altra proposizione *b* in virtù di una terza proposizione *c* (Ammessa *a* si deduce *b* in virtù di *c*» cioè: « se è vera *c*, allora la verità di *a* implica la verità di *b* »). Ebbene tutti questi ragionamenti validi si possono ridurre ad un sillogismo solo, oppure ad un gruppo connesso di sillogismi: *c* fornisce la maggiore, *a* la minore e *b* la conclusione. Sarebbe allora facile trasformare la dimostrazione di un teorema del 1° libro di Euclide in un sistema di sillogismi; però si presenta una difficoltà nella riduzione a sillogismi delle dimostrazioni per assurdo. È bene approfondire questa questione, in vista anche della critica che faremo della *logica matematica.*

« Se due rette di un piano formano con una trasversale due angoli alterni interni eguali, sono parallele ». Ammesso che le due rette complanari M A, N B formino con la trasversale A B due angoli alterni interni eguali α, β, si *deduce che* M A non può incontrare N B perchè se esistesse il punto d' incontro C si avrebbe un triangolo A B C nel quale un angolo esterno α sarebbe eguale ad un angolo β interno e non adiacente, e ciò non è possibile *in virtù* del teorema, già dimostrato, dell' angolo esterno. Quì il principio giustificativo risulta dall' applicazione del teorema dell' angolo esterno e dal principio di contraddizione.

Poniamo per α il concetto: " coppia di rette complanari che con una trasversale formano angoli alterni interni eguali „ per β il concetto: " coppia di rette complanari che una trasversale formano angoli alterni interni disuguali „ e per γ il concetto „ coppia di rette che s' incontrano. Allora la

dimostrazione per assurdo può porsi sotto la forma del sillogismo in *camestres* (modo A E E, 2ª figura) :

Ogni γ è β
α non è β
Dunque; α non è γ

Due rette che s' incontrano formano angoli alterni interni disuguali (ogni γ è β), ma le due rette non formano angoli alterni disuguali (α non è β), dunque queste rette non s' incontrano (α non è γ).

Così resta provato che anche la dimostrazione per assurdo è riducibile a forma sillogistica e perciò si può concludere che ogni ragionamento deduttivo valido può sempre porsi sotto la forma di un sistema di sillogismi, in tutti i casi di implicazioni mediate.

Riunendo insieme questo risultato con il precedente potremo dire che: " La condizione necessaria e sufficiente per la coerenza o validità formale di un processo logico di implicazioni mediate è che queste possano porsi sotto la forma di un sistema di sillogismi. „

44. Significato del problema della logica formale e della sua risoluzione.

Il valore logico di un giudizio si esprime dicendo che quel giudizio è *vero*, oppure è falso (*Wahrheitswerth* di Frege, *truth - value* di Russell).

Vi è differenza tra *enunciare* semplicemente una proposizione *p*. ed *asserire* che tale proposizione è *vera*. Così in una ricerca attuale di matematica posso propormi di costruire un triangolo rettangolo equilatero " io dico: „ Sia A B C un triangolo rettangolo equilatero " Questa proposizione all' inizio del processo logico è semplicemente *enunciata* (*Wahrheitsfrei*), ma alla fine risulta falsa perchè la somma degli angoli di quel triangolo sarebbe eguale a tre angoli retti. Una proposizione si può *asserire vera* solo dopo la sua *dimostrazione*; allora la si fa precedere dal segno di asserzione $\vdash$ (di Frege) o dalla parola *teorema*. Mentre la *determinatezza* di un processo logico è nell' invarianza del significato dei concetti e dei giudizi, la *coerenza interna* è nell' invarianza del *valore verità* dei giudizi.

La logica fornisce alcuni principi fondamentali il cui valore verità è garentito dal criterio della testimonianza: tutti questi principi si riassumono nella legge della conservazione del significato dei termini del discorso. In seguito vengono costruite dei modelli di ragionamenti nei quali il

valore verità dai principi viene trasferito alle conseguenze. In qualsiasi campo di conoscenza ove sia possibile la perfetta determinazlone dei concetti e l' affermazione del valore verità del *sistema completo* delle proposizioni primitive e dei concetti primitivi, sarà anche possibile costruire dei ragionamenti validi, e la logica formale ci dà la condizione necessaria e sufficiente di questa validità [1].

Premesso ciò, cosa significa dire che una proposizione p è vera? La risposta è la seguente: *la proposizione p è vera quando può inquadrarsi in un processo logico coerente come proposizione dedotta nel corrispondente sistema di implicazioni.* Se p appartiene ad una determinatao- teria scientifica, il suo *valore verità* le viene trasmesso dalle proposizioni precedenti ed in ultima analisi, dal valore veritá *posto* nei principi della teoria, cioè nel sistema completo dei concetti primitivi e delle proposizioni primitive. E poichè questi concetti e queste proposizioni sono *compatibili* [1] *la contraddizione esclusa dai principi non potrà mai presentarsi nel seguito del processo, data la coerenza dello stesso.*

La determinazione del valore verità dei principi costitutivi della logica formale è l'oggetto principale di questa (1. e 2.), la determinazione del valore verità dei principi del sistema completo di una teoria speciale non appartiene alla logica formale, che dà solo lo schema del processo logico coerente, sul quale dovranno poi modellarsi i processi ideali delle scienze speciali, ognuno con il suo specifico contenuto.

Il criterio della verità nella logica formale è il criterio della non contraddizione.

Credo opportuno insistere in questo punto su la profonda differenza di significato del *criterio formale* della verità e del *criterio della testimonianza.*

Nella seconda parte di questo saggio tratteremo della *contraddizione reale* contrapposta alla *contraddizione formale* nella determinazione dei vari aspetti che assume il criterio della testimonianza dalla logica alla matematica ed alle scienze speciali e poi alla speculazione filosofica.

45. **Conclusione della seconda tappa del nostro cammino.**

La logica formale qual' è stata precedentemente delineata si presenta sotto un duplice aspetto: 1° Un insieme coordinato di nozioni perfettamente

[1] Su la compatibilità e l'indipendenza delle proposizioni primitive, vedi in seguito (n. 55, 56, 57.)

definite (concetto, giudizio, implicazione immediata, ragionamento) con la impostazione e la risoluzione del problema logico fondamentale: determinazione delle condizioni necessarie e sufficienti per la validità formale dei processi logici. Scelta una forma adatta di esposizione, potrebbe presentarsi la logica come una *dottrina bell' è fatta* e compiuta in tutti i suoi particolari. ASPETTO DELLA DIALETTICA NEL PENSATO. 2° Ma nell' analisi e nella sintesi fatta durante la costruzione, non può non notarsi l' adesione perfetta del processo ideale del *concreto pensare.*

Dalla determinazione stessa è sorta l' esigenza di superare il significato finito dei processi ideali, e di passare dall' astratto al concreto, dal finito all' infinito: ASPETTO DELLA DIALETTICA DEL PENSARE.

PARTE SECONDA

La contraddizione reale

(Logica del pensare)

CAPITOLO 1.°

LA COERENZA INTERIORE DEI PROCESSI LOGICI DELLE SCIENZE SPECIALI

46. Processi analitici e processi sintetici.

Chiameremo *analitica* una teoria costruita in modo che, premessi i concetti primitivi e le definizioni, tutto lo sviluppo se ne possa dedurre con un processo logico assolutamente compatto, cioè senza lacune e senza aggiunte non comprese nelle premesse. Detto A il sistema delle definizioni e dei concetti primitivi, sia *p* una proposizione qualsiasi della teoria costruita come ora si è detto; ebbene si potrà affermare che *p* è implicita nel sistema A, cioè che *p non ci dice niente di nuovo.* Le teorie analitiche hanno dunque il carattere dei *giudizi analitici* di Kant, giudizi tautologici, cioè compresi nel significato implicativo del concetto della proposizione (se x é un α, esso soddisfa al criterio C (α)).

Esempio: premesso il sistema A dei concetti primitivi e delle definizioni dell' aritmetica, isoliamo dalla teoria dei numeri interi il sistema delle proposizioni sulla divisibilità. " Un numero intero *m* si dice divisibile per *n* quando esiste un altro intero *k*, che moltiplicato per *n* dia *m* ($m=nk$). » Allora: « Se due interi *m, m'* sono divisibili per *k*, anche $m+m'$ sarà divisibile per *k*,, ; » Un multiplo di un multiplo di k è pure multiplo di k ,,. Queste proposizioni sono deducibili con processo logico compatto dalle premesse, sono *giudizi analitici.* Ma non potremo andare così molto lontano; per passare alle scomposizione in fattori primi dobbiamo *fare un*

salto, dobbiamo interrompere in un punto preciso la continuità e la compattezza del processo. Questa interruzione ha luogo quando si *anticipa la proposizione*: " Ogni numero non primo ammette sempre un divisore primo,,. Infatti, sia p il più piccolo divisore di m e che sia diverso da 1 e da m (divisore che esiste perchè m non è primo); se p fosse non primo, dovrebbe ammettere un divisore n diverso da 1 e da p e tale divisore n sarebbe più piccolo di p cioè più piccolo del minimo divisore di m *il che è assurdo.* Quì la compattezza del processo logico è interrotta, ed irreparabilmente, dall' anticipazione della proposizione e dalla sua dimostrazione per assurdo; la conclusione va al di lá delle premesse.

Questo esempio chiarisce la concezione kantiana del *giudizi sintetici,* cioè dei giudizi che non sono impliciti nel significato del soggetto e che quindi ci fanno conoscere *qualche cosa di nuovo* riguardo al soggetto stesso. Alla tesi di Kant " tutti i giudizi matematici sono sintetici,, è stata contrapposta l' altra: " tutti i giudizi matematici sono analitici,,. Così enunciate entrambe le tesi sono false: esistono in matematica giudizi analitici (p. e. un intero multiplo di un multiplo di k è pure multiplo di k) e giudizi sintetici (p. e. se m non è primo, ammette almeno un divisore primo.) Per determinare il senso in cui è vera la tesi kantiana del carattere *sintetico* della matematica dobbiamo considerare le teorie matematiche in blocco e nella loro intima costituzione. Se le teorie matematiche fossero analitiche le matematiche sarebbero una gigantesca logomachia e la tautologia regnerebbe sovrana nella scienza. Ma il significato ed il valore della matematica è tutto nella scoverta e nella conquista di veritá sempre nuove. Le teorie matematiche debbono dunque essere sintetiche. E questo verrà confermato in vari modi dalla nostra indagine.

47. **La coerenza interiore del processo logico delle teorie matematiche.** Il modo in cui va intesa la coerenza logica delle teorie matematiche risulterá chiaramente dall' esempio che ora esporremo.

La p un numero primo, dimostreremo che esiste sempre un numero primo maggiore di p. Costruiamo a *tale scopo* il numero:

$$s = 1 + 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times p$$

Se s è primo, per il modo stesso seguito nel formarlo, esso è maggiore di p. Se s non è primo, deve ammettere (come precedentemente si è visto)

almeno un divisore primo *d*, e questo non può trovarsi prima di *p* perchè, se si divide *s* per 2, per 3. .... per *p* si trova si trova sempre il resto 1.)

Dunque il numero primo *d* deve risultare maggiore di *p*. In ogni caso, dato un numero primo *p* ne esiste sempre un altro maggiore di *p*, e questo, *qualunque sia p*: » La serie dei numeri primi è illimitata » Questa proposizione non è implicita nel sistema delle premesse, cioè non si può dedurre da queste con precedimento logico *compatto*. La compattezza della serie di deduzioni è interrotta in due punti: prima con la costruzione del numero $s = 1 + 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times p$ *fatta con determinato scopo* e poi con la dimostrazione per assurdo che presuppone un'*anticipazione*.

TALI INTERRUZIONI NON INFIRMANO LA COERENZA LOGICA DEL PROCESSO: che la serie dei numeri primi sia illimitata può asserirsi con la stessa necessità, con la quale si afferma che « un intero multiplo di un multiplo di k è pure multiplo di k ».

Nel dimostrare l' assunto ora enunciato dobbiamo ripigliare la nostra analisi di procedimento sillogistico in un punto fondamentale. Tutti i critici della logica classica sono d' accordo nel ritenere i sillogismi di 2ª, 3ª e 4ª figura quali forme *spurie* ed ibride di ragionamenti e perciò si sono sforzati di ridurre tali figure alla 1ª. Qualunque sia il metodo seguito in questa riduzione, ciò che vi è di essenziale è la conversione delle proposizioni ottenuto con ragionamenti per assurdo, espressi o sottintesi. Ciò vuol dire che quelle forme *spurie* sono caratteristiche delle dimostrazioni per assurdo. A conferma ricordo la riduzione della dimostrazione tipica per assurdo ad un sillogismo in *camestres* (fatta nel N° 43). Non è dunque vero che nei ragionamenti concreti non si adoperano forme riducibili a sillogismi che non siano di 1ª figura. Il sillogismo in *barbara* è caratteristico delle dottrine analitiche, cioè tautologiche. Se si ammettessero come sole *genuine* le forme sillogistiche di 1ª figura sarebbero escluse dalla logica formale le forme dei processi logici non aventi carattere analitico cioè di processi realmente esistenti nella matematica e nelle altre scienze. Ecco perché nella mia anallsi del sillogismo ho considerato tutte le forme logicamente valide senza occuparmi della riduzione di esse alla 1ª figura, riduzione che può farsi quando si vuole, ma allora si introducono nei ragionamenti le forme spurie che si volevano evitare.

Ammesso dunque che il ragionamento che procede per artifizi e per assurdo non possa ridursi ad un sistema dei sillogismi in barbara, si può sempre affermare che esso può ridursi ad un complesso di deduzioni ele-

mentari del tipo « *permesso che ...... si deduce che ....., in virtù di .....* » e come principi giustificativi possono considerarsi anche i giudizi negativi in modo da escludere ogni contraddizione. Allora la contraddizione esclusa dal sistema di premesse viene anche esclusa in tutto il processo. Le anticipazioni, le costruzioni fatte con un determinato scopo, le dimostrazioni per assurdo, in un processo logico non analitico non infirmano la coerenza interna di esso.

48. **Il processo sintetico dell' induzione completa, la tesi di Poincarè.**

Il procedimento dell' induzione completa, o *ragionamento ricorrente*, in matematica consiste nel passaggio da un caso particolare ad un risultato generale, ottenuto mediante la considerazione implicita di *tutti* i casi possibili. Ad esempio, per dimostrare, per n qualunque, la formola binomiale che dà $(x + \alpha)^n$ la si prova prima per $n = 2$, poi si dimostra che se la legge vale per l' esponente k, vale pure per k + 1 e poi si conclude così: la formula vale per 2, dunque vale anche per 3; se vale per 3, vale anche per 4 e così via. Siccome con tale procedimento si può raggiungere *n qualunque sia n*, la legge risulta dimostrata in tutta la sua generalità. Tre momenti si possono distinguere in questo processo: 1ª la conclusione particolare per n = 2, ottenuta direttamente con processo deduttivo; il passaggio da k a k + 1 ottenuto pure con metodo deduttivo, ma con *un'anticipazione* del risultato, 3º il passaggio dal particolare al generale ottenuto con un *entimema*, che consta di un numero indefinito di sillogismi (induzione); siccome però l'ultimo sillogismo della catena è raggiungibile *qualunque sia n*, la conclusione è perfettamente valida. Enrico Poincarè [1] ha per il primo messo in chiaro il significato dell' induzione nei processi matematici e l' importanza che essa ha per la determinazione del carattere sintetico dell'aritmetica: « Il principio d' induzione è alla base dell'aritmetica e solo può « apprenderci qualche cosa di nuovo; *senza l'aiuto dell' induzione la costru- « zione analitica sarebbe impotente a creare la scienza.* » Egli intese il principio d' induzione come *sintesi a priori*, ma non interpetrò questa nel suo pieno significato speculativo, e nel passaggio dell'aritmetica alla geometria ed alla fisica seguì la dottrina della scienza degli *empirio criticisti*. Ciò non pertanto, le acute

[1] « La science e l' hypothèse » Paris 1902 (Cap. 1º

osservazioni e le vedute geniali di cui è ricca la sua trilogia (« La science et l' hypothese » 1902, « La valeur de la science » 1905 e « Science et methode » 1908) fanno considerare questa come il *discorso sul metodo* del secolo ventesimo.

49. Il significato dei giudizi negativi nei processi sintetici; critica della teoria di Brentano.

Il carattere sintetico dei processi matematici si è rivelato principalmente nella necessità della dimostrazione per assurdo (n. 46 e 47). Da ciò risulta il profondo significato dei giudizi negativi nel ragionamento. Franz Brentano, nella sua esposizione della teorica del giudizio, tentò di ridurre a questa forma tutti i giudizi affermativi. Egli ridusse il giudizio categorico al giudizio esistenziale: « Nessuna pietra è vivente » significherebbe: « non esiste una pietra vivente » « Tutti gli uomini sono mortali » vorrebbe dire: « non vi è uomo immortale. » E' chiaro allora che anche i giudizi universali affermativi (tipo A dI Aristotele) possono convertirsi in giudizi negativi. Ma l'artifizio é evidente e risulta da tutto il seguito della doftrina logica di Brentano, che conduce al sovvertimento dei *praeambula logicae* e della teoria del sillogismo. Lo stesso sillogismo in *Barbara* consterebbe di quattro termini invece di tre (« Ogni α è un β, ma ogni β è un γ, dunque ogni α è un γ » significherebbe: « non vi è α che sia non β, ma ogni β è un γ, dunque non vi è α che sia un *non* γ » i quattro termini del sillogismo sarebbero β, non β, γ e *non* γ.) [1]

Che cosa possa trarsi da queste sottigliezze ce lo mostra l' autore stesso, che dalla sua riforma della logica ricava soltanto qualche grazioso paradosso, come il seguente [2]: « " Tutti gli S sono P „ con la precisa ipotesi « che non esistono gli S (classe nulla). Allora, pure essendo vera la pro- « posizione; " Ogni S è P „ è vera la contraria: " Nessun S è un P „ « per la semplice ragione che non esistono gli S. E pertanto è falsa *(dice « Brentano)* la regola che la verità di " Tutti gli S sono P„ sia incompa- « tibile con quella di " Nessun S è P ».

---

[1] « Psyckologie vom empirischem Standpunkt » (Lipsia ed 1925, 2° vol. cap. 7)

[2] « La classificazione delle attività psichiche » Trad. di M. Puglisi (Cultura dell' anima, ed Carabba 1913, p. 147)

E Brentano è così convinto di avere, con questo giochetto di parole, colpita a morte la logica aristotelica, che esclama: « Non vi è qui alcun « mezzo per difendere la vecchia logica ». Già prima Boole aveva sfidata tutta *l'analitica* di Aristotele a provare chè " se il cavallo è un animale, la testa del cavallo è la testa di un animale „ con la speciosa argomentazione dell' idra che non ha testa. La risposta è immedlata.

I giudizi logici *come tali* sono *existenzfrei*, ma in un processo concreto, cioè quando la *forma* ha preso possesso di un contenuto specifico, l' esistenza dei concetti S e P risultà dalla stessa *attività oggettivante* del pensiero. Che colpa ha la logica se la *forma* „ Ogni S è un P " è rimasta senza contenuto nell' applicazione concreta? Voi mi dite che gli S non esistono, io vi ringrazio della notizia che mi date, e vi dico che in tal caso le due proposizioni " Ogni S è un P „ , Nessun S è un P " *sono prive di senso* nel vostro discorso, *e la colpa è vostra, non della logica.*

Pur ritenendo che la teoria del giudizio di Brentano abbia portato un notevole contributo di chiarificazione nella logica, col porre in evidenza il significato del giudizio esistenziale negativo, nessuna seria riforma della logica è possibile solo su questa base. E lasciando ai numerosi *riformatori* la cura di complicare a loro piacere i principi della *vecchia logica* termino questo paragrafo notando che il profondo significato dei giudizi negativi risulta, nel concreto processo matematico, dal fatto che ogni volta si conquistino nuovi veri, *bisogna superare una negazione con una dimostrazione per assurdo* (esistenza delle grandezze incommensurabili, unicità del limite, esistenza degl' insiemi non numerabili ecc. ecc).

50. Superamento della pregiudiziale della logica matematica.

La negazione del carattere sintetico dei processi matematici è la pregiudiziale implicita della *logica matematica* e nella *logica dell' identità*. Esaminiamo ora il valore di questa pregiudiziale.

La logica matematica è nata dal tentativo di trasformare il giudizio logico in *identità* allo scopo di sottoporlo al calcolo. Dai primi tentativi di *Leibniz* [1] all' algebra der Logik „ di Schiöder [2] vi è stato tutto un processo di complicazione dei principî della logica e di falsificazione del significato del giudizio e dei processi logici. *Giorgio Bentham* ed *Hamilton* vol-

---

[1] L. Couturat: « *La logique de Leibniz* » Paris, 1901.

[2] « *Vorlesungen über di Algebra der Logik, Leipzig* 1890, 1891, 1895 (tre volumi).

lero *quantificare il predicato* aggiungendo ai giudizi delle particolarità che possono risultare solo *vi materiae* (p. e. se α è β in *toto* o *ex - parte*) Si hanno così 4 forme di proposizione affermative e 4 forme di proposizioni negative; le figure del sillogismo sono ridotte a 3, ma in ogni figura si riconoscono 12 modi affermativi e 24 modi negativi; in tutto la bellezza di 108 sillogismi *quantificati* validi [1] Ma un primo *record* della confusione e complicazione fu raggiunto da De Morgan che introdusse tali sottili distinzioni e tale molteplicità di simboli che persino L. Liard [2] gran simpatizzante della logica matematica, fu costretto, dopo un vano tentativo di esposizione, a mandarlo a farsi benedire.

Con *Giorgio Boole* [3] s' inizia il calcolo del ragionamento deduttivo, o logica algebrica. Di qual natura siano le nuove complicazioni si comprende confrontando il significato semplicissimo *dell' eliminazione logica* nel sillogismo, col signfficato molto complesso dell' eliminazione algebrica. Ove una semplice enumerazione di tutti i casi possibili vi fa risolvere col solo buon senso una questione, la logica di Boole vi pianta un bel sistema di equazioni logiche, le quali, dopo molta fatica, vi conducono ad un risultato sbagliato. Ma il *record* in questà nuova forma di complicazione è stato battuto da *Stanley Ievons* [4] con le sue *tavole di combinazloni*, col suo *abbecedario logico* e con la sua *macchina per ragionare*; basti dire che in certe questioni in cui entrano quattro termini bisognerebbe formare una tavola di combinazione di 66596 casi da considerare.

Dal 1889 datano i primi lavori di logica matematica di Giuseppe Peano. [5] Dopo i lavori di Dedekind s' imponeva un nuovo esame dei principii dell' aritmetica ed il matematico italiano si propose di analizzare le idee di logica riducendole ad un piccolo numero, per raggiungere un doppio scopo; costruire una ideografia atta a rappresentare le idee della matematica ed applicarla ai principi dell' aritmetica per evitare le pseudo definizioni correnti e le inesattezze dovute a confusione d' idee. Un ritorno alle

Boole equazioni logiche

Jevons

Peano

---

[1] *Thompson: "An outline of the necessary Laws of Thought".*

[2] *"Le logiciens anglais contemporains"* Paris 1901.

[3] «*The mathematical analysis of Logic*» 1847; «*An investigation of the Laws of Thought*» 1854.

[4] «*Pure Logic*» 1864; «*On the mechanical performance of logical inference*» 1870 e «*The principles of science*» 1874.

[5] «*Arithmetices principia*» 1889; «*I principii della geometria*» 1889; «*Formulario di Matematica*» dal 1896 al 1906; «*Le definizioni in matematica*» 1911 ecc.

teorie aristoteliche fondamentali è la caratteristica delle ricerche logiche di Peano, il quale da un travaglio più che trentennale ha tratto notevoli risultati. A Peano ed alla sua scuola si deve la concezione del *sistema completo* dei principî dell'aritmetica, che, come dimostro in questo lavoro, dà il modo di stabilire con tutto rigore la validità logica delle teorie matematiche. Insieme con Peano, anche Frege [1] e Russell ripresero l'esame dei principii della scienza, ma non giunsero a stabilire col dovuto rigore il *sistema completo*. Pur distinguendo, nella valutazione, questo indirizzo della logica matematica dall'altro indirizzo dell'algebra della logica, debbo notare che entrambi hanno a comune la tesi della costituzione puramente analitica delle teorie matematiche, dalla quale scaturiscono tre errori.

a) Ritenere che al linguaggio comune sia necessario sostituire un insieme di segni, e che soltanto così possa raggiungersi la perfetta determinazione di concetti.

È vero invece che a questa si può pervenire con il linguaggio comune, che la complessità reale di alcuni concetti deve tradursi nella complessità dei simboli corrispondenti, e che, se vi sono determinazioni non raggiunte servendosi del linguaggio comune (insiemi bene ordinati di Zermelo, esse non sono raggiunte neanche con il linguaggio dei simboli. Se errori vi sono nella costruzione stessa della logica, e questi errori sono generalmente diffusi (p. e. considerare *non* α indipendentemente dal genere prossimo di α), essi passano puntualmente dal linguaggio comune alla *pasigrafia* di Peano, Frege e Russell, e l'errore resta. L'errore e la verità non dipendono affatto dal linguaggio in cui sono espressi; è una strana illusione quella di ritenere che un mutamento di linguaggio, e propriamente il passaggio dell'espressione verbale all'espressione simbolica, possa magicamente eliminare il dubbio o l'errore, e pure questa illusione persiste ancora nei logici matematici anche dopo i più clamorosi insuccessi.

b) credere che lo sviluppo di una teoria matematica possa presentarsi come automatico e che possa quindi idearsi una *mechanical performance* che permetta di dedurre dalle premesse tutte le possibili conclusioni o viceversa (*Jevons*).

È vero invece che nelle teorie matematiche si raggiungono verità non implicite nelle premesse; nessuna *mecanical performance* può condurci dalle

---

[1] « *Begriffsschrift* 1879; « *Grundgesetze der Arithmetik* 1893 e 1903.

proposizioni primitive dell' aritmetica e dalle prime nozioni sulla divisibilità all' affermazione della serie illimitata dei numeri primi (N. 46 e 47).

c) Identificare la matematica con la logica, come fa Russell.

Tale identficazione non può essere che una confusione; si confondono p. e. le classi come concetti con *l' insieme* dei matematici, che già ha preso il suo contenuto specifico, la relazione intesa nel suo significato logico formale con la funzione del matematico.

51. **Superamento della pregiudiziale della logica dell' identità.**

L' ammettere che tutti i processi ideali siano processi analitici conduce immediatamente alla tesi della *logica dell' identità* di Meyerson: « Solo la « identità dell' essere con se stesso, quale fu concepita da Parmenide, è « perfettamente omogenea alla ragione e trasparente ad essa, e per conse- « guenza ogni spiegazione razionale è un' identificazione del diverso e con- « siste nel ricondurre all' identità ed all' immutabilità la molteplicità ed il « mutamento che ci sono dati nell' esperienza » (Identité et réalité 3ª ed. Paris 1926, pag. 433) Questo ritorno all' idealismo primitivo ed ingenuo di Parmenide, dopo tutti gli sviluppi della speculazione filosofica nel corso dei secoli, è profondamente antistorico. Basterà dimostrare li carattere sintetico dei processi ideali per demolire in blocco la costruzione di Meyerson, [1] Questa presuppone la perfetta continuità e compattezza del processo ideale, e noi vi abbiamo contrapposta una concezione, per così dire *quantistica* [2] dell' attività del pensare. E come la negazione dell'energia concepita quale un perfetto continuo ha condotto i fisici alla teoria dei *quanta*, iniziando una nuova era di scoverte, così il rinnovamento ed il completamento della concezione Kantiana della *sintesi*, condurrà ad una più esatta determinazione del concetto di scienza nel campo della speculazione filosofica.

---

[1] Confronta oltre all'opera già citata, le altre: « *De l'explication dans les sciences* » (Paris 1921); « *La deduction rélativiste* » (Paris 1925). Per l'esposizione del contenuto di queste opere vedi il lavoro esauriente di N. Abbagnano (Biblioteca di filosofia diretta da A. Aliotta, 1929).

[2] E' inutile quì insistere sulla differenza evidente della concezione *quantistica* e della concezione *atomistica*.

52. **La sintesi a priori come attività oggettivante, l' autoctisi.**

Determinato il carattere di coerenza logica dei processi scientifici intesi come processi sintetici, dobbiamo ora più profondamente indagare le condizioni *reali* della loro validità. Passeremo con ciò dalla pura logica alla speculazione filosofica.

Premetto un esempio concreto di dimostrazione geometrica.

In questa figura c' è un circolo e c' è una corda A B eguale al raggio.

Congiungo O con A e B, ove O è il centro del circolo. Avrò il triangolo equilatero O A B; poichè ogni triangolo equilatero è pure equiangolo i tre angoli A, B, C debbono essere eguali, e perciò ognuno di essi sarà di 60°. Risulta allora che l' arco A B è di 60°, cioè la stessa parte della circonferenza, ed io concludo che A B è il lato dell' esagono regolare inscritto nel cerchio O.

L' inizio del ragionamento consiste nel sillogismo di 1ª figura,: « Tutti i triangoli equilateri sono equiangoli, ma *questo triangolo O A B* è equilatero, dunque questo triangolo O A B è equiangolo. » Se si isola il sillogismo dal vivo processo logico appare la *tautologia*: il valore verità si trasferisce dalle premesse alla conclusione perchè già *implicito nelle premesse* (significato distribuitivo del predicato rispettò al sôggetto, significato implicativo dei giudizi.) Ma se lo stesso sillogismo si considera nel processo della inscrizione dell' esagono regolare nel cerchio (aspetto dinamico) la tautologia scompare. Infatti io ho costruito il triangolo O A B con un *delerminato scopo* e quindi non posso dire di avere prima considerato *esplicitamente* questo triangolo O A B (si verrebbe a considerare la classe dei triangoli equilateri, come *attualmente* data). In questo punto preciso è il passaggio dal *significato determinato* del triangolo equilatero il suo significato infinito.

Inoltre, quando io ho disegnato il circolo O ed una corda A B eguale al raggio, io vi ho presentata una figura materiale con tutte le sue imperfezioni; il circolo, la corda, il triangolo O A B sono dei *dati* dell' intuizione sensibile, ma nel ragionamento da me fatto io ho superati tutti i particolari dell' intuizione empirica, perchè ho costantemente sostituito al circolo, alla corda, al triangolo pessimamente disegnati, il circolo, la corda, il triangolo della mia definizione. Il risultato cui pervengo (A B è il lato dello esagono regolare inscritto nel cerchio) resta assolutamente valido per *questa adesione delle mìe rappresentazioni sensibili con i puri concetti della mia mente*, (passaggio dall' intuizione empirica all' intuizione pura, *sintesi a priori.*)

L'oggetto: esagono regolare inscritto nel cerchio, vien fuori per questa mia attività, è, per così dire, *creato* da questa mia attività, Ecco cosa intendo per *sintesi a priori* come *attività oggettivante.* A chi dice che non esiste il passaggio dall' intuizione empirica all' intuizione pura, io presento il processo dinamico precedente e rispondo: *eccovelo.* A chi nega la sintesi a priori io rispondo che non si può negare la propria attività (sviluppo del processo) nel momento stesso in cui la si attua.

Espongo ora brevemente la concezione della *sintesi a priori kantiana.*

Perchè si conosca qualche cosa come *oggetto* è necessario che la *molteplicità* delle impressioni sensibili e delle rappresentazioni si riduca ad unità, e perchè l' unificazione sia possibile dev' esserci una sintesi delle rappresentazioni sensibili con le *forme* dell' intelletto *(sintesi a priori).*

Com' è possibile questa sintesi? L' attività fondamentale del pensiero dev' essere essa stessa una sintesi, una *sintesi originaria,* per cui le rappresentazioni diverse si unifichino in *una coscienza*: « Das *Ich denke* muss alle meine Vorstellungeu begleiten konnen » Kant chiama appercezione trascendentale *l' Io penso,* considerato come espressione dell' unità della coscienza, unità che precede tutti i dati dell' intuizione, e che sola rende possibile la rappresentazione di un *oggetto.* La sintesi delle rappresentazioni sensibili e delle *forme a priori* ha luogo in virtù dell' unità sintetica originaria della coscienza, espressa dall' " *Io penso* " [1]. Le intuizioni pure ed i concetti puri sono le *forme* che lo spirito trova in se stesso come condizioni *a priori* di ogni conoscenza; *esse precedono l' esperienza e la rendono possibile.*

Possiamo ora intendere il profondo significato del criterio della testimonianza nella nuova forma in cui si è presentato. All' argomento di Diogene viene a sostituirsi un criterio di *oggettività* generale, che assume l' attività stessa del pensiero come *attività oggettivante.* All' argomento cartesiano in senso ristretto (impossibilità di negare l' attività del pensiero nel momento stesso in cui la si pone in atto) viene sostituito l' argomento del *cogito* come sintesi originaria dell' unità della coscienza.

Ed ancora un altro aspetto assume la differenza tra la *contraddizione* reale e la *contraddizione formale.* La negazione della negazione si riduce formalmente ad un' affermazione, ma il significato *reale* della *negazione della*

---

[1] *Kant:* « Kritik der reinen Vernunft » parte seconda, 2ª sezione della seconda edizione e § 15-27 della prima edizione.

negazione è in un' affermazione intesa come sintesi e come creazione; la *negatività* di Hegel, *l' autoctisi* gentiliana intesa come *ritmo dello spiriro che crea.*

53. La funzione dei postulati e degli assiomi nelle teorie matematiche. Faremo ora un' importante applicazione delle cose ora dette. Ci proponiamo di determinare la *funzione oggettivante* dei postulati e degli *assiomi* nelle scienze matematiche.

In matematica, *determinato* un concetto A nel sistema delle nozioni primitive o con una definizione ' non sempre resta determinato realmente un *oggetto* corrispondente; talvolta è necessaria una proposizione, od un sistema di proposizioni, che aggiunte alla definizione rendano possibile la deduzione del complesso delle proprietà. Così, determinato il concetto del piano (superficie illimitata che contiene ogni retta avente due punti su di esse,) si deve: *a*) affermare l' esistenza nel campo proprio dell' intuizione pura (« Per tre punti non in linea retta passa un piano ed uno solo »); b) aggiungere alcune proposizioni primitive che definiscano le più semplici proprietà del piano. (« Un piano è diviso da una sua retta in due regioni opposte entrambe convesse, » due piani aventi in comune un punto hanno in una retta » ecc.). Solo dopo l' aggiunta di tali proposizioni, il piano diventa *oggetto* di una trattazione geometrica.

Postulato è una proposizione che si AGGIUNGE *alla definizione per rendere possibile la costruzione della teoria.* L' esempio che possiamo dire tipico, è il postulato di Eudide o postulato delle parallele.

Definisco parallele due rette complanari che non s' incontrano. Questa è la determinazione formale del concetto delle parallele, e se le teorie geometriche fossero analitiche, dalla definizione e dalle nozioni precedenti si potrebbero trarre tutte le proprietà. Ma la determinazione formale non è sufficiente per costruire la teoria delle parallele nella geometria euclidea; bisogna *aggiungere* questa proprietà, che « da un punto esterno ad una retta non si può condurre a questa che una sola parallela » oppure altra proposizione equivalente. Le ricerche moderne sui fondamenti della geometria hanno dimostrato l' indipendenza del postulato delle parallele da tutte le nozioni precedenti, cioè che premesse queste nozioni e la definizione delle parallele, non si può in nessun modo dedurre il fatto dell' unicità della parallela. Lo stesso può ripetersi per tutti gli altri postulati di matematica, (postulati dell' ordine, aggiunti alla defiinizione della retta, postulati del movimento aggiunti alla definizione dell' eguaglianza delle fi-

gure, postulato della continuità aggiunto alla definizione della misura ecc.). Tutto ciò conferma e pone in nuova luce l' attività oggettivante del pensiero in matematica ed il carattere sintetico delle teorie matematiche. *Passiamo agli assiomi.* Per bene intendere la funzione di questi bisogna richiamare il significato della *categoria* kantiana, del *concetto puro*, indipendente da ogni esperienza e che *rende possibile l' esperienza stessa.* Il concetto puro, considerato nella sua generalità, è vuoto di ogni concreto contenuto; questo è dato dall' esperienza, sia esperienza in senso stretto, sia nel senso più lato di esperienza nel campo dell' intuizione pura. Concetto puro ed intuizione sono talmente uniti nell' attività oggettivante del pensiero che il *contenuto* intuitivo viene a modellarsi sulla *forma* presentata dalla categoria «*Il concetto puro senza l' intuizione é vuota, la intuizione senza il concetto è cieca.*» (Kant).

Alla categoria della quantità si riferiscono i principi più generali dell'eguaglianza e della disuguaglianza. *Gli assiomi della matematica sono i principi generali dell' uguaglianza e della disuguaglianza, che rendono possibili le definizioni dei concetti determinati di eguaglianza e disuguaglianza che si presentano nella costruzione delle singole teorie.*

Esempio 1° " Due cose eguali ad una terza sono eguali tra di loro ,, (Euclide, assioma 1° del primo libro degli " Elementi ,,.

Due *cose*, dunque, non due triangoli, non due segmenti, non due numeri irrazionali; la forma dell' assioma è tale che esso non può immediatamente applicarsi alla dimostrazione dei teoremi. La proposizione : " Due numeri irrazionali eguali ad un terzo sono eguali tra di loro, non è più un assioma, perchè il concetto puro dell' eguaglianza ha già ricevuto il suo contenuto concreto, e la conclusione è possibile solo perchè noi abbiamo costruito questo concetto in modo da poter dedurre la tesi.

Esempio 2° «Il tutto è maggiore della parte» ecco un assioma. «Una parte di una figura piana finita non può essere equivalente all' intera figura». Quest' altra proposizione non è un assioma perchè il concetto di *parte* ha già trovato il suo contenuto specifico. La teoria va costruita in modo da rispettare il principio generale e, se non riesce possibile includerlo in definizioni, lo si *aggiunge* come postulato (è il postulato di De Zolt).

Messa in chiaro la funzione oggettivante delle categorie sotto la forma degli assiomi della matematica, debbo aggiungere che presso i matematici le categorie kantiane *non hanno una buona stampa.* A tale proposito voglio riferire un notevole episodio. Dopo una laboriosa seduta della Commis-

sione esaminatrice di un concorso a cattedre di matematica e fisica nelle scuole medie, il presidente prof. Giuseppe Bagnera, insigne metematico, volle intrattenersi con l' umile sottoscritto. Egli si lagnò giustamente della grande ignoranza dei candidati nei principi delle matematiche ed insistette sulla necessità di introdurre nelle scuole di preparazione per gl' insegnanti le ultime teorie sui fondamenti della scienza. " Vedete quanto disordine e " quanta confusione c' è nelle idee di questi concorrenti; pseudo-definizioni " metafisicherie invece di concetti chiari e rigorosi, chiacchiere inconcludenti " invece di processi logici di costruzione delle teorie. S' impuntano nel vo- " ler definire per forza l' uguaglianza, ignorando del tutto le ultime vedute " correnti nella scienza..... Noi non definiamo più l' eguaglianza ma carat- " terizziamo questa relazione mediante le sue proprietà più generali (pro- " prietà simmetrica, proprietà transitiva......) e poi facciamo rientrare nel " quadro, caso per caso, le figure eguali, le figure equivalenti, gl'insiemi.... „ Seguì tutta una lunga spiegazione, intramezzata da qualche sfogo contro la sintesi a priori, contro la categoria e contro la *turba dei metafisici.* Io dichiarai subito il mio assentimento alle sue teorie, poi esposi, come ho fatto in queste pagine, il significato della sintesi a priori, e delle categorie kantiane, e poi conclusi: " In tutta la sua esposizione, molto chiara e perspicua, è immanente il concetto puro, la *categoria*, dell' uguaglianza, e Lei negandola viene a negare la sua attività nel momento stesso in cui l' attua „. Quest' applicazione *ad hominem* del mio criterio della testimonianza cadde così a proposito che potetti per un momento illudermi di avere riabilitata la filosofia nello spirito lucido ed acuto del prof. Bagnera [1].

54. L' autoctisi come libertà assoluta che coincide con la necessità assoluta.

La determinazione precisa del diverso ufficio degli assiomi, dei postulati e delle definizioni ci mostra l' attività creatrice dello spirito nella costruzione dellle teorie matematiche. Il procedimento è *dall' indistinto* al *distinto*; l' indistinto è dato dagli assiomi; con la definizione si ha una prima distinzione, i postulati e lo sviluppo reso possibile da tutti questi elementi ci danno l' ulteriore sviluppo. Abbiamo pure mostrata la necessità degli assiomi e dei postulati, gli uni per *preparare* le definizioni, gli altri per completarle

---

[1] Per altri particolari su l' argomento trattato in questo paragrafo si può consultare la mia memoria « I principi della matematica » (A dell' Accademia pontaniana 1918).

e per rendere possibile la teoria. *Il carattere fondamentale di quest' attività creatrice è la libertà.* Ciò non poteva sfuggire agli studiosi dei principî della matematica, ma a tutti è sfuggito il vero significato di questa *libertà*, che è stata interpetrata come *arbitrarietà* (arbitrarietà dei concetti primitivi, arbitrarietà dei postulati). Giorgio Cantor, il creatore della teoria degl' insiemi, ad uno dei suoi lavori fondamentali prepose il motto: " Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit ,, L' interpetrazione troppo letterale di questo aforisma condusse alla critica e sovversione della *vecchia logica.* È qui è opportuno ricordare le parole di Kant: " La colomba leggiera , che nel suo volo libero fende l' aria, ha sentita la resistenza di " questa ed ha pensato che volerebbe ancora meglio nel vuoto ,,.

Il vero significato della libertà è, direbbe Giovanni Gentile, *nel ritmo dello spirito che crea*; non vi sono limiti che vengono da *fuori*, ma l' attività oggettivante è limite a se stessa. Non è dunque la libertà come arbitrarietà, essa è la libertà nel suo significato speculativo più profondo, la libertà di Cusano, Bruno e Spinoza: la libertà assoluta, che è tutt' uno con la necessità assoluta. sotto tutti i rapporti

Per fare intravedere la possibilità di questa conciliazione nell' assoluto mi servirò di un esempio concreto. Consideriamo l' assenso ad un dogma: chi non crede, ma è costretto ad assentire da un' imposizione esterna, non è libero (necessità *relativa* all' imposizione che gli vien fatta); se questa costrizione non c' è egli si sentirà libero di assentire o non assentire (libertà relativa alla mancanza di imposizione esterna). Consideriamo invece l' assenso dato al teorema di Pitagora da chi è capace di ripensare e rifare il vivo processo dimostrativo di Pitagora. Il suo spirito non è puramente ricettivo, e non avrà altri limiti che la sua stessa attività (libertà assoluta) ma, appunto per questo, egli *non potrà non assentire* alla tesi (*necessità assoluta*).

55. **Inizio dell' esposizione dell' assiomatica di Hilbert; notizie storiche.**

Abbiamo nel N. 7 dimostrato la necessità logica del sistema completo dei principî di una teoria per la determinazione formale del concetto, e nel N. 43 abbiamo visto quale importanza ha nella risoluzione del problema della logica; ora ci proponiamo di vedere in qual modo la contraddizione viene esclusa nei principî della matematica. Per questo dovremo entrare nei particolari tecnici della costituzione del sistema completo.

Beltrami in un suo classico lavoro[1] diede la sua prima dimostrazione dell' indipendenza del postulato di Eudide da tutte le nozioni che lo precedono. Costruita la *superficie pseudosferica* (a curvatura costante negativa) e definite le geodetiche parallele, Beltrami dimostrò che da un punto della superficie si possono condurre due geodetiche parallele ad una data. Da ciò si deduce l' indipendenza logica del postulato delle parallele da tutte le proposizioni che vengono prima. Infatti, diciamo *punto* un punto della pseudosfera, *retta* una geodetica, *angolo*, l' angolo di due geodetiche, *triangolo* un triangolo geodetico. Per la natura stessa della superficie a curvatura costante negativa, valgono per questi *punti*, queste *rette*, questi triangoli tutte le proposizioni che precedono la teoria delle parallele. Allora, supponiamo che si sia data una dimostrazione del postulato della parallela unica *nel piano*, dipendente solo dal complesso delle dette proposizioni e della definizione delle parallele; se si trasporta questa dimostrazione dal piano alla pseudosfera, nessun mutamento c' è da fare e si arriva alla conclusione che da un punto della pseudosfera si può condurre una sola geodetica parallela ad una data, e ciò contraddice il risultato già stabilito per le altre proprietà della pseudosfera, che cioè da un punto della pseudosfera si possono condurre *due* geodetiche parallele ad una data. Questa dimostrazione, che utilizza opportunamente il trasferimento del significato dei termini geometrici, può considerarsi come il germe da cui si è sviluppato il *sistema completo* di Hilbert. Tale sistema presenta in blocco i concetti primitivi e le proposizioni primitive della geometria in un complesso che ha questi due caratteri: 1ª *compatibilità* dei concetti e delle proposizioni; 2° *indipendenza* delle proposizioni stesse. Allora l' esclusione della contraddizione dai principi significa anche esclusione della contraddizione da tutto il processo logico della geometria.

L' elemento logico della compatibilità nel sistema dei principi, fu introdotto, prima che da Hilbert, da Giuseppe Peano e dalla sua scuola, nella

[1] *Eugenio Beltrami:* «Saggio d' interpretrazione della geometria non euclidea» (Giornale di matematica di Battaglini 1868).

[2] Cfr. specialmente: A. *Padoa* «Riassunto delle conferenze su l'algebra e la geometria quali teorie deduttive» (Conferenze su l'algebra e la geometria tenute nella R. Università di Roma, 1900 § 3, 4 e 5; «Atti del congresso internazionale dei matematici del 1900» (Conferenza del prof. Peano nella quale il matematico italiano afferma per sè e per la sua scuola il diritto di priorità nella costruzione del sistema completo dell'Aritmetica).

prima costruzione del sistema completo dell' Aritmetica [2]. Ad Hilbert si deve lo svolgimento dell' idea applicata ai principi della geometria e la fondazione dell' assiomatica " (Axiomatik) quale si è svolta e si va svolgendo tutt' ora in Germania, in America, in Italia [1].

56. **Il sistema hilbertiano dei principi della geometria** *(David Hilbert)*: " Grundlagen der Geometrie „ cap. 1°.

I *dati* della geometria risultano *definiti per astrazione* mediante il gruppo delle proposizioni primitive (dette impropriamente *assiomi*) necessarie e sufficienti per la costruzione della teoria.

Noi pensiamo, dice Hilbert, tre diversi sistemi di *cose* (*Dinge)*; le cose del primo sistema le chiamiamo *punti*, quelle del secondo sistema *rette* e quelle del terzo sistema *piani*. Queste cose le pensiamo in certe loro reciproche relazioni, che descriveremo mediante gli *assiomi della geometria.*

Si distinguono 5 gruppi di *assiomi.* 1° *assiomi della connessione,* in numero di otto (due punti distinti individuano una retta; tre punti non in linea retta determinano un piano, ecc.) 2° *assiomi dell' ordine,* in numero di quattro. (Fra tre punti di una retta, uno è sempre *compreso* tra gli altri due; se una retta passa per un punto di un lato di un triangolo e non per un vertice, essa taglia uno degli altri due, ecc.) 3° *assiomi della congruenza od eguaglianza,* in numero di sei (due segmenti eguali ad un terzo sono eguali tra di loro; due angoli eguali ad un terzo sono eguali tra di loro ecc. Nel sistema di Euclide sono implicati i postulati del movimento geometriche, Hilbert ne fa a meno, e perciò segue tutt' altra via; egli ammette come postulato il 1° caso d' eguaglianza dei triangoli: « se due triangoli hanno rispettivamente eguali due lati e gli angoli compresi, il terzo lato del 1° è eguale al terzo lato del 2°, » assioma III) 4° *Postulato delle parallele*: " da un punto fuori di una retta si può condurre una sola retta parallela „. 5° *Postulato di Archimede*: „ Dati due segmenti, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore „ (V_1). In fine vi è il *postulato di chiusura* (V_2): » Gli elementi *punti, rette; piani* costituiscono un sistema di *cose* « che non è più estendibile se si mantengono fermi tutti gli assiomi prece- « denti, cioè al sistema di punti rette e piani non è possibile aggiungere

---

[1] Crf. una recente nuova trattazione della « geometria non archimedea, del prof. *Comessatti.*

« un altro sistema di cose in modo che per il sistema così esteso valga « il complesso di detti assiomi ».

Per dimostrare la compatibilità degli assiomi del sistema Hilbert considera il campo di razionalità Ω costituito dai numeri algebrici che si ottengono partendo da 1 eseguendo addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni ed operazioni del tipo $\sqrt{1+\omega^2}$, ove ω è sempre un numero già ottenuto con le operazioni precedenti. Chiamando *punto* una coppia di numeri del campo Ω e *retta* i rapporti u : v : w di tre numeri di Ω con *u* e *v* non entrambi nulli, si dirà che il punto (u, y) giace sulla retta (u, v, w) quando si verifica l'equazione $u\,x + v\,y + w = o$. Definiti in modo appropriato, i segmenti, gli angoli, l'ordine e la congruenza od eguaglianza, si viene a costruire una parte della geometria analitica cartesiana (i punti e le rette sono a coordinate *speciali)* e per questa geometria così limitata Hilbert dimostra che tutti gli assiomi dal I, al V_1 sono verificati. Ora, ogni contraddizione tra i risultati dedotti da questi assiomi si tradurrebbe nell'aritmetica del campo Ω, ma questa, ed in generale l'aritmetica del campo reale, è costruita con un sistema di assiomi tra loro compatibili, dunque anche il sistema degli assiomi I-V_1 non può dar luogo a contraddizioni.

Estendiamo il campo Ω in modo da ottenere il campo di razionalità costituito da tutti i numeri reali; l'estensione corrispondente del sistema di *punti rette, piani,* ci dà una geometria che coincide con l'ordinaria geometria cartesiana, la quale non si può più oltre estendere senza che venga meno qualcuno degli assiomi I - V. Ogni contraddizione dipendente dagli assiomi I - V si tradurrebbe in una contraddizione nell'aritmetica del campo reale, dunque tutti gli assiomi del sistema sono compatibili.

Come si vede, la compatibilità del sistema completo hilbertiano è fondata su la compatibilità del sistema completo dei principi dell'aritmetica, donde l'importanza del risultato già ottenuto dal Peano e poi confermato dallo stesso Hilbert (« Vortrage uber den Zahlbegriff » Berichte der deutichen Mathem. Vereinigung 1900).

57. La quistione dell' indipendenza degli assiomi.

Nella dimostrazione dell'indipendenza degli assiomi del sistema Hilbert arriva a risultati molto importanti. Ne segnaleremo qualcuno, mettendo nello stesso tempo in evidenza il procedimento seguito nella ricerca, e che coincide con quello di Beltrami (n.° 55).

Si può costruire una geometria nella quale siano validi tutti gli assiomi del sistema con la sola eccezione del III_6, cioè nella quale due triangoli aventi eguali rispettivamente due lati e gli angoli compresi non sono eguali.

A tale scopo lasciamo inalterati i concetti di punto, retta, piano in senso cartesiano, ed anche il concetto di angolo, e modifichiamo opportunamente la definizione dell' uguaglianza. Dati due punti: $A_1 (x_1, y_1, z_1)$, = $= A_2, (x_2, y_2, z_2)$; definiremo la loro distanza, non come il valore assoluto di $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, ma come valore assoluto di $\sqrt{(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. Con ciò vien determinato uno speciale significato dell' eguaglianza di due segmenti $A_1 A_2$. $A_1^1 A_2^1$, e si dimostra che in questa *nuova geometria* valgono tutti gli assiomi, escluso il III_6, cioè si dimostra che si possono effettivamente costruire due triangoli aventi rispettivamente eguali due lati e gli angoli compresi, senza che il terzo lato del primo sia eguale al terzo lato del secondo. Ciò significa che l'assioma III_6 è indipendente da tutti gli aitri.

Tra i più importanti risultati delle ricerche di Hilbert sono da notare:

a) Una particolare esposizione della teoria della similitudine e delle proporzioni, in cui si dimostra che esse possono svolgersi indipendentemente dal postulato di Archimede.

b) Costruzione di una geometria nella quale non è valido il postulato di Archimede (Geometria non-archimedea).

c) Costruzione di una geometria in cui non vale il teorema di Pascal sull' esagono inscritto in due rette (Geometria non pascaliana).

d) Costruzìone di una geometria in cui non vale il teorema di Desargues sui triangoli omologici (Geometria *non desarguesiana*).

Tutte queste *nuove geometrie* sono *geometrie in senso trasferito;* esse non sono altro che teorie di speciali campi di numeri, come il campo Ω, e di speciali corrispondenti calcoli segmentari; il significato della parola *segmento* muta da un campo all' altro. Dalla trattazione di tutte queste geometrie *non geometrie* non nasce affatto, come a prima vista potrebbe sembrare, una costruzione arbitraria. Allo stesso modo come dalla scoverta della pseudosfera di Beltrami, la cui teoria è pura analisi, si desume l' indipendenza del postulato di Euclide da tutti gli altri postulati, così dalle teorie analitiche dei vari campi di numeri complessi considerati da Hilbert, si trae la risoluzione della quistione generale della compatibilità e dell' indipendenza degli assiomi del sistema completo dei principî della geometria. Si scovre così il più intimo legame tra le varie proposizioni, e si dimostra,

per esempio, che il teorema di Desargues non si può dimostrare nel piano se non si ammette la prop. IV del 1° libro di Euclide (assioma III_6), che quest' ultima proposizione è indipendente da tutte le altre del sistema completo, ecc.

58. L' assiomatica hilbertiana presentata come dimostrazione definitiva del carattere sintetico della matematica.

Con il sistema completo dei principî la costruzione matematica assume l' aspetto esteriore di una *teoria logica compatta;* gli elementi primitivi sono definiti in blocco e *per astrazione* e tutto il resto è pura costruzione logica, *analitica.* Ma si tratta di sola apparenza. La sintesi non solo è nelle varie costruzioni della geometria *non-archimedea, non-pascaliana* ecc., ma s' infiltra persino nello stesso sistema completo. Infatti c' è l' assioma V_2 nel quale si ammette che il sistema di cose di cui si tratta non si può più oltre estendere (n. 56). Gli assiomi I-V_1 definiscono il sistema in modo che nessun altro possa confondersi con esso; ciò non ostante c' è bisogno di un' *aggiunta* per costruire la teoria, e quest' aggiunta (*postulato* nel suo vero significato) è proprio necessaria per risolvere la questione della compatibilità e dell' indipendenza delle proposizioni primitive.

Inoltre, per dimostrare che gli *assiomi* sono compatibili ed indipendenti, quelle tali *cose* (punti, rette, piani) si debbono prima interpetrare in un modo, poi in un altro, poi in un altro ancora (i campi Ω). Dunque, dicendo p. e. *retta,* non s' intende un concetto *singolo,* ma un concetto variabile, una funzione alla cui variabile indipendente si danno di volta in volta determinati valori. Insomma, il carattere analitico non si riferisce alla teoria dei concetti *singoli* di retta, punto, piano, ma ai *concetti funzionali*; quando da questi si passa ai concetti singoli, la teoria diventa sintetica.

Per esempio, quando si passa dal piano, che è considerato come *un sistema di tre numeri u, v, w* (e che quindi può interpetrarsi come quella qualsiasi cosa determinata da quel sistema), al piano *in senso proprio,* si osserva che questo è determinato completamente dagli assiomi I_1-$_6$, ed allora l'assioma I_7 è un' aggiunta, è un postulato nel senso da noi ammesso. Così, ancora, la retta *in senso proprio* è perfettamente determinata dagli assiomi di posizione (1° gruppo), ed allora gli assiomi dell' ordine sono delle vere *aggiunte.* In conclusione: per costruire le teorie dei concetti singoli geometrici, considerati nel loro *significato proprio,* non basta determinarli in

modo che essi non possano confondersi con altri concetti singoli, ma sono necessarie delle *aggiunte*, dei postulati.

È importante ora studiare la funzione del traslato in tutto questo procedimento dell' *assiomatica*.

Il passaggio dai concetti di retta, piano, punto *in senso proprio* (cioè quali vengono presentati dalla pura intuizione) ai concetti quali vengono presentati nel sistema completo, viene attuato per mezzo di opportuni *trasferimenti di significato* (n. 57). Così, ad un punto dello spazio posso far corrispondere una circonferenza di un piano in modo da avere una corrispondenza biunivoca: al punto (a, b, c) dello spazio faccio corrispondere la circonferenza $x^2 + y^2 + 2ax^2 + 2by + c = 0$ e viceversa. Allora, alle rette dello spazio corrispondono fasci dl cerchi nel piano. Quelle tali *cose* dette punti, rette, piani, che formano oggetto del sistema completo, si possono dunque intendere come cerchi, fasci di cerchi, reti di cerchi, e, se si trasferiscono opportunamente i significati dell' *ordine*, dei *segmenti* e degli *angoli*, continueranno a valere tutti gli assiomi. Ciò non toglie il fatto che chiamare *punto* una circonferenza e *retta* un fascio di cerchi costituisce un puro e semplice traslato. La funzione di questi trasferimenti di significato nel sistema completo è della massima importanza. La costruzione successiva dei vari campi hilbertiani Ω nei quali si realizza il traslato *è il solo mezzo che noi abbiamo per dimostare la compatibilità e l' indipendenza delle proposizioni primitive.* Raggiunta questa dimostrazione, noi potremo concludere con perfetto rigore logico che, determinati i concetti di punto, retta, piano *in senso proprio*, mediante le sole loro proprietà caratteristiche (p. es. la retta è individuata da due punti distinti, il piano da tre punti distinti non in linea retta), tutte le altre proposizioni del sistema sono *aggiunte non eliminabili.* Questo si può ripetere per le teorie matematiche in generale, e si può così affermare in modo definitivo il carattere sintetico delle matematiche.

Aggiungo, infine, che gli altri elementi rivelatori della sintesi (costruzione fatta con un determinato scopo, dimostrazione per assurdo) abbondano nelle varie parti dell' assiomatica hilbertiana. Confronta, ad esempio, il capitolo su la geometria non-pascaliana, che presenta chiaramente il carattere di una ricerca originale e profonda, con la conquista di nuovi risultati che nessuna *mechanial performance* potrà mai dare.

59. Collegamento dell' Assiomatica con la Gegenstandstheorie.

Nella logica formale noi ci occupiamo di concetti α, β, ... e delle relazioni possibili tra questi concetti senza alcun riguardo alla *materia* delia conoscenza. La questione dell' esistenza *concreta* di questi concetti in matematica, in fisica, nella speculazione filosofica, non appartiene alla logica, ma alle scienze speciali e alla filosofia. Può dunque dirsi che in logica formale i concetti α, β... vanno considerati indipendentemente dalla loro esienza o meno (daseinsfreie Gegenstände). Similmente i giudizi relativi a quei concetti sono considerati a prescindere dal loro *valore verità*, che sarà poi fissato, caso per caso, *vi materiae* (wahrheitsfreie Urteile).

Il Meinong ha chiamata *Gegenstandstheorie* la scienza che tratta degli oggetti del pensiero, considerati a prescindere dalla loro esistenza nell' esperienza. Due ordini di considerazioni hanno condotto Meinong alla costruzione della sua teoria.

a) Nella trattazione dei principî della geometria col metodo formale (p. es. nel sistema completo di Hilbert) vengono posti certi concetti: punto, retta, piano, insieme con le prime relazioni tra di essi. Però non si tratta di punti. di rette, piani nel senso ordinàrio, ma di certe *cose*, che a volta a volta s' interpretano opportunamente, proprio come avviene dei concetti α, β, γ.... della logica formale. Le relazioni poste tra questi concetti sono *a priori* ed al di là di ogni esperienza possibile (erfahrungsfreie Wissenschaft).

b) Anche quando si dà il contenuto dei concetti mediante una definizione, l' intuizione empirica non cì dà mai la rappresentazione perfetta dell' *oggetto*, e perciò le relazione tra i concetti non sono mai verificabili con l' esperienza. Per esempio, dati in concreto due segmenti, se le loro lunghezze differiscono notevolmente, posso affermare che sono disuguali, ma se la differenza cade al di qua della *soglia della distinzione* (Unterschiedsschwelle) non potrò mai affermare l' eguaglianza. Le proposizioni sui concetti idealmente costruiti non appartengono alla scienza dell' *esistente*, ma alla scienza che tratta degli *oggetti come tali*, indipendentemente dall' esistenza.

Ii pensiero di Meinong e dei suoi seguaci [1] è molto involuto; talvolta sembra che la *Gegenstandtheorie* debba pascersi di *circoli-quadrati*, di corpi

---

[1] « Uber die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenshaften » Lipsia 1907.

inestesi, di parallele che s'incontrano, e simili ircocervi (op. citata 1 parte, § 3); tal'altra la teoria sembra coincidere con l'analitica trascendentale di Kant (op. citata § 6). Ed ogni tanto errori gravi ed inesattezze: la gnoseologia presentata come *scienza dei giudizi veri* (p. 128), la geometria non-euclidea completamente fraintesa (p. 80), la mancata distinzione tra le note di un concetto incompatibili per definizione (*circolo-quadrato*) e le note che risultano incompatibili nel prosieguo del processo (poliedro règolare con faccie esagone). Basti dire che per Meinong le parallele non euclidee nou esistono come non esiste il circolo - quadrato (ganz ebenso unmöglich wie das runde Viereck).

Gli oggetti considerati a prescindere dalla loro esistenza sono anche detti dal Meinong « heimatslose Gegenstände »: la crisi degli alloggi anche nella *Gegenstandstheorie!* Questi famosi *oggetti* sono inquilini senza casa, se la casa è l'esperienza. Ma da un altro punto di vista si può dire che la Gegenstandstheorie ci dà una casa senza inquilini. Infatti i concetti α, β, γ.. sono indeterminati rispetto all'esistenza loro concreta, e le loro relazioni sono inverificabili nella realtà. Meinong ha dunque raggiunto l'ideale della scienza russelliana, in cui gli oggetti non si sa cosa siano, e non si sa mai se le proposizioni che si enunciano sono vere: pura forma senza contenuto, casa senza inquilini.

Raccogliendo tutto ciò che nella ricerca di Meinong può avere un valore filosofico, possiamo dire quello che la *Gegenstadstheorie* dovrebbe essere: una propedeutica generale della filosofia, comprendente la logica formale e la gnoseologia come base per la determinazione dei principî delle scienze speciali. Parte centrale: un'accurata discussione del significato di giudizi esistenziali, della funzione oggettivante delle categorie e della sintesi *a priori*. In questo senso, i primi tre capitoli di questo mio saggio possono anche intendersi come una correzione ed un rifacimento della *Gegenstandstheorie*. Questa differisce dall'*ontologia*, come la logica formale differisce dalla *logica speculativa* (in senso hegeliano).

60. L'induzione ed il principio di causalità.

Dobbiamo ora fermare la nostra attenzione sul passaggio dalla matematica alla fisica; il principio d'induzione si presenterà sotto una nuova forma.

Il principio induttivo in fisica non è valido *vi formae*, ma *vi materiae*. Questo punto é stato trattato con grande acume da Lachelier[1] il quale ha

mostrato che l'induzione può considerarsi come un sillogismo di terza figura, incompleto, ma nel quale « la raison et l'expèrience achèvent l'oeuvre du raisonnement ». Enunciamo un sillogismo con queste due premesse:

a) « Quest' ago d'acciaio bilicato devia in vicinanza d'un filo percorso da corrente ».

b) Quest' ago di acciaio bilicato è un ago magnetico ».

Tali premesse sono entrambe del tipo A (come giudizi a soggetto *singolo*); ma ogni sillogismo che s'inizia con A, A deve necessariamente terminare[2] con I, dunque l'unica conclusione formalmente valida è:

c) « Alcuni aghi magnetici deviano in vicinanza d'un filo percorso da corrente »

Per concludere che questa è una proprietà di *tutti* gli aghi magnetici (fenomeno d'Oersted) bisogna approfondire lo studio del fenomeno, determinarne le condizioni *necessarie e sufficienti* e fare appello al principio della costanza delle leggi naturali, che nessuna logica formale può fornire, e che corrisponde al passaggio da k a k + 1 nell'*induzione completa* dei matematici.

Come bisogna intendere il principio della costanza delle leggi naturali ?

Un complesso A di avvenimenti *determina* un fenomeno o avvenimento B quando esso costituisce l'insieme delle condizioni *necessarie e sufficienti* di B; allora A si dirà *causa* di B e B *effetto* della causa A.

Se il complesso A determina un fenomeno B nell'*esperienza attuale*, esso determinerà lo stesso fenomeno B in qualsiasi *esperienza possibile*. « *Nessun fenomeno può prodursi ove non intervenga una causa di esso, cioè un avvenimento od un complesso di avvenimenti che lo determini*: non *vi è fenomeno che non abbia la sua causa* » (principio di casualità).

Un qualsiasi giudizio che raccolga il risultato di una esperienza è sintetico *a posteriori*, perchè quel risultato non è implicito nell'esperienza ed è raccolto *in seguito* ad essa. Il principio di causalità, invece, è sintetico *a priori*: il concetto di *effetto* trovasi unito al concetto di *causa*, ma non vi è implicitamente compreso (sintesi) e questa unione non si può trarre dall'esperienza. Così un nuovo elemento si viene ad aggiungere alla determinazione del *criterio della testimonianza*: l'attività oggettivante del pen-

---

[1] *J. Lachelier* « Du fondement de l'induction » Paris 1907 p. 36,37 e *passim*.

[2] Questo punto è stato posto al riparo da ogni obbiezione nel cap. 2°.

sare non si esplica solo nel passaggio dall'intuizione empirica all'intuizione pura, ma ancora nel passaggio dall'esperienza attuale all'esperienza possibile. La sintesi *a priori* nell'attività dello spirito ci dà le condizioni della possibilità stessa dell'esperienza.

Noi conosciamo degli oggetti ciò che l'esperienza ci presenta, cioè il fenomeno; d'altra parte la possibilità dei legami e della sintesi risiede tutta nella nostra attività pensante, ; *noi non potremmo riconoscere collegati nell'esperienza i fenomeni che non avessimo prima collegati nel nostro pensiero*: l'oggetto non è un dato per sè stante, ma un prodotto della nostra attività. L'intelletto stesso è l'autore dell'esperienza: noi non ricaviamo le *leggi* dalla natura, ma le prescriviamo noi stessi ad essa. Questa è la scoverta copernicana di Kant.

61. **L'argomento di Hume e l'empirio-criticismo; risposta.**

« L'esperienza non ci presenta nei fenomeni che pure sequenze tem-« porali (il *prima* ed il *poi*); nessuna esperienza può mostrarci un legame « universale e necessario tra i fenomeni all'infuori della pura successione « nel tempo e quindi non sussiste il principio di causalità » (argomento di Hume).

Risposta di Kant; « è vero che il principio di causalità non si può « trarre dall'esperienza, ma esso sussiste perchè esprime la possibilità stessa dell'esperienzà e quindi la *condizione* ». Quest'argomento kantiano è stato così poco convincente presso i fisici (o presso la maggior parte dei fisici), che è sorta una teoria della scienza che nega l'idea di causa precisamente come faceva Hume. In tale teoria *le leggi* della fisica non danno la *spiegazione* dei fenomeni, ma costituiscono un mezzo *economico* e *comodo* per descriverli; al criterio del vero vien sostituito il criterio della *comodità*. La scienza ha per solo oggetto la descrizione dei fenomeni: una teoria non è altro che una descrizione ordinata la quale permetta di classificare i fenomeni per presentarli nella maniera più comoda e più economica. Non esistono dunque *teorie vere* o *teorie false*, ma teorie più o meno comode. Questa veduta d'insieme fu esposta in tutti i suoi particolari dal maggior rappresentante dell'empiriocriticismo moderno, E. Mach [1], e trovò un forte appoggio nell'ala destra della scuola del prammatismo (pramma-

[1] « Beiträge zur Analyse der Empfindungen » 1886 ed « Erkenntniss und Irrthum » 1907.

tismo come *nuova logica*: lentativo di convertire il *vero* con l'*utile*); pioniere C. S. Peierce [1], massimo rappresentante F. C. S. Schiller [2].

Sopprimiamo dunque dal dizionario le parole *causa, vero, falso*; ma che cosa troviamo noi nel significato delle parole preferite: *utile, comodo, economico*? La scienza non è, secondo gli *empirio-criticisti*, una descrizione disordinata: ci dovrà dunque essere ùn ordine e quest'ordine lo dobbiamo imporre *noi* (già comincia a delinearsi l'idea espressa dalla rivoluzione copernicana di Kant!), Le idee dell, economia di pensiero, della comodità, dell'utile, quando siano approfondite, acquistano un significato che è tutto nell'attività nostra come attività di pensiero; la pura descrizione lascia sfuggirsi l'*anima del fatto*, e l'anima del fatto *è in noi*, nella nostra attività oggettivante. Ed è proprio questa nostra attività ehe noi scorgiamo ccme significato profondo dei concetti: *causa, vero, legge*. Il fisico che attua la sua scienza, anche se *verbalmente* nega ie idee di *causa* e di *vero*, opera ciò non ostante, come se avesse sempre presenti queste idee; se egli si mette alla ricerca dell'idea di causa e non la trova fa la stessa figura di qnel dottore che andava in cerca dalla sua mula mentre la cavalcava. Ed a questo punto cade a proposito il mio ritornello della *contraddizione reale*: « voi dunque negate la vostra attività nel momento sfesso in cui l'esplicate ».

Possiamo ora porre in altra forma la risposta all'argomento dl Hume. Ogni vera sintesi mostra l'esigenza di un superamento; quando abbiamo sintetizzata la logica del pensiero determinato siamo andati molto al di là nelle considerazioni fatte a proposito del criterio della testimonianza; la sintesi della dottrina della scienza, cui stiamo procedendo, farà sorgere la necessità di superare ia conoscenza scientifica, cioè di passare dal significate finito delle idee al loro significato infinito, già implicito nel primo.

Ora: *contrarre l'infinito nel finito è* NECESSARIO ed è IMPOSSIBILE. È necessario, perchè il momento astratto del *pensiero determinato* è un momento inevitabile nell'attività del pensiero; è impossibile perchè le categorie del pensiero determinato sono inadeguate alla espressione della piena attività del pensare. L'idea di *causa* ha un significato infinito che non può contrarsi nel finito di un esperienza e perciò Hume non poteva dedurla speri-

---

[1] « Illustration of the logic of science: (I How to make our Ideas clear) ». (The popular science monthly, gennaio 1878).

[2] « Humanism » 1903.

mentalmente, ma essa è *ostensibile*, sempre presente come *infinito concreto*, e per conseguenza non può negarsi che verbalmente. Su questa concezione dell'infinito concreto ritorneremo in seguito.

62. **Lo sviluppo delle teorie scientifiche; la funzione dell' ipotesi.** Cerchiamo ora di penetrare più addentro nell' intima struttura di una teoria scientifica.

Hp

Per l' azione selettiva dell' attenzione un avvenimento singolo B può presentarsi sulla soglia della coscienza *(osservazione)*. La memoria e l' attività associativa presentano l' avvenimenlo B ripetuto più volte e l'osservatore è indotto a determinare le condizioni necessarie e sufficienti dell' avvenimento B, cioè a determinare il complesso A di avvenimenti in seguito ai quali avviene B e senza i quali B non si verifica. Finalmente l'osservatore crea lui stesso il complesso A di avvenimenti, ed in seguito a ciò ottiene l' avvenimento B (*esperienza)*.

Nel passaggio dall' osservazione all' esperienza e già implicita l' idea di causa.

Continuiamo; nel processo della ricerca scientifica, che consiste nel collegamento delle esperienze, il fisico è condotto, dallo stesso insieme di fatti osservati e sperimentati, a formulare delle proposizioni non verificate e non verificablli, che hanno questa funzione: *ammesse tali proposizioni* (*ipotesi*) *i fenomeni di un determinato gruppo si realizzano* **come se** *quelle proposizioni fossero vere*. Questo è il significato dell' ipotesi scientifica, quale fu la prima volta determinato da Galileo. È nella formazione delle ipotesi e dei sistemi d'ipotesi che si esplica la funzione semplificatrice dell' attività obbiettivante del bensiero; *da ciò risulta il vero significato del criterio economico degli empirio-criticisti.*

Il progresso scientifico consiste nell' approfondire sempre più il significato dell'ipotesi. Nel modo d'intendere le ipotesi vi è progresso continuo che può condurre anche alla loro radicale trasformazione. Spiegheremo questo con due notevoli esempi.

a) Avogadro nelle sue ricerche sui fondamenti della chimica riconobbe che per porre d' accordo i fatti osservati e sperimentati delle combinazioni chimiche, bisognava ammettere che: « due volumi eguali di gas diversi, nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione, hanno egual numero di molecole ». In seguito, la teoria cinetica dei gas sostituì a quest' ipotesi un' altra molto più semplice: « Le molecole dei gas sono in con-

tinuo movimento; esse si urtano tra di loro ed urtano contro le pareti del recipiente »; la pressione del gas dipende da questi urti e la temperatura [assoluta] dipende dalla forza viva molecolare media, cioè dall' energia cinetica delle molecole in movimento. Stabilite le formule fondamentali della teoria, la proposizione di Avogadro si può dimostrare: l' ipotesi di Avogadro è diventata *legge di Avogadro*. E la fisica moderna, dall' accordo meraviglioso di teorie e fatti è arrivata a dedurre il *numero di Avogadro*, cioè il numero delle molecole comprese nell' unità di volume di un qualunque gàs nelle condizioni normali di temperatura e di pressione [circa 6000 miliardi di miliardi di molecole in ogni centimetro cubo.

b) L' ipotesi atomica, nella sua prima formulazione, presentò *l' atomo* come l' assoluto indivisibile dl Leucippo e di Democrito; il significato chimico di essa fu determinato da Stanislao Cannizzaro: l' atomo d' idrogeno é la minima parte in peso d' idrogeno *che entra sempre intera* nelle molecole di tutti i composti idrogenati. La nuova teoria degli elettroni, se contraddice la vecchia concezione dell' atomo, non intacca per nulla l' ipotesi atomica nel senso inteso dai chimici dopo Cannizzano.

I progressi più recenti della fisica c' inducono a considerare l' *aspetto materiale* dei corpi come intimamente collegato con l' energia vibratoria: il concetto di materia si converte in quello di energia.

L' accordo perfetto di fatti e teorie diverse nella determinazione della massa dell' elettrone [circa un duemillesimo della massa dell' atomo dell' idrogeno] e nella ricerca della struttura dell' atomo e della molecola, fa considerare l' ipotesi sotto un aspetto nuovo: l' ipotesi non è più il semplice *decome se*, considerato solo come un mezzo economico e comodo per *descrivere* con un certo ordine i fenomeni; essa appare nella sua funzione unificatrice e creatrice, nella sua *funzione oggettivante*. Oggi il fisico, che dall' interferenza e dei raggi X ha la rivelazione della struttura delle molecole dei cristalli, può auche essere intimamente convinto di aver da fare non con un edifizio fantastico ed ipotetico, ma con la realtà stessa, tale è l' adesione perfetta di idea e realtà, di teorià e fatto.

63. **Come va inteso il sistema completo dei principii in fisica.**

Nessuna definizione formalmente rigorosa può darsi del movimento, della forza, della massa, dello spazio, del tempo; tutti questi concetti si presenteranno in blocco, come *concetti primitivi* della meccanica insieme con le relazioni fondamentali tra di essi [sistemi d' ipotesi: principio d' i-

STM

nerzia, 2° e 3° principio della dinamica]. Nel passaggio dalla meccanica alle altre branche il sistema completo viene opportunamente ampliato. Una soluzione di continuità rimaneva tra il sistema dei principii della meccanica ed il sistema dei principii dell'elettrodinamica, tra le equazioni della meccanica classica e le equazioni di Maxwell. Questa lacuna fu colmata da Lorentz e condusse alla teoria dellà relatività di Einstein, che rappresenta la sintesi più completa, nelle condizioni attuali, della scienza. Ma mentre per la geometria e l'aritmetica è stata fatta, ed in modo esauriente, la dimostrazione della compatibilità e dell'indipendenza dei principii del sistema completo, questo scopo non si è ancora raggiunto in fisica. Il sistema dei principii della fisica è *in fieri*, e tutti i più recenti progressi si possono, da un certo punto di vista. interpetrare come tentativi per dimostrare la compatibilità dei vari gruppi d'ipotesi. La massima unificazione dei principii è ora raggiunta dalla teoria della relatività intimamente collegata con la teoria dei quanta e con la meccanica ondulatoria. *Vi è poi perfetta analogia tra il procedimento dimostrazione della compatibilità in matematica ed in fisica*; *in entrambi i casi si procede utilizzando opportunamente dei sistemi ben congegnati di traslati.*

Su la funzione del traslato nella costruzione della scienza m'intratterrò nel prossimo paragrafo; per ora mi limito ad esporre uno dei più importanti risultati del sistema completo dei principî della fisica: la determinazione del significato della misura delle grandezze fisiche.

Il fisico ignora cosa sia *in sè* la forza, la massa, la carica elettrica- il calore, ma l'applicazione dei principî del sistema permette il determi, nare il significato dell'eguaglianza di due forze, di due masse, ecc, e quindi di determinare il significato dei loro multipli o summultipli; allora, definita in modo preciso l'unità di misura, riesce possibile la misura di quelle grandezze fisiche. Esempio: « Diremo eguali due forze *f, f,* « quando queste imprimono ad una stessa massa *m* accelerazioni eguali; « diremo che $f = \alpha f'$ quando applicando queste forze alla stessa massa *m,* « l'accelerazione impressa dalla prima è α volta l'accelerazione impressa « dalla seconda ». Dopo ciò si fissa l'unità di misura « La *dine* è la forza « che imprime all'unità di massa (la massa grammo) l'accelerazione di « un cm a secondo ». Dopo ciò è determinata la misura delle forze. Analogamente si procede per la carica elettrica, per il calore, ecc. Un'applicazione di questo procedimento al *valore economico* trovasi nel mio

volume: « Studio su le conseguenze economiche e sociali della guerra » (Ed. Rondinella, Napoli 1928).

64. **La funzione del traslato nella costruzione delle teorie scientifiche.** La scienza e la speculazione filosofica sono linguaggi organizzati il cui tessuto connettivo è costituito da sistemi di traslati. Così, in fisica i sistemi d'ipotesi, che sono alla base delle teorie, possono considerarsi come delle allegorie il cui significato si va svolgendo nel progresso della scienza. Nel passaggio dalla matematica elementare all'alta geometria ed all'alta analisi il progresso si realizza mediante successive generalizzazioni che non sono altro che sistemi di traslati: il punto all'infinito ed i punti ciclici sono *punti* in senso trasferito, gli spazi pluridimensionali sono *spazi* in senso trasferito e lo stesso calcolo infinitesimale è un'allegria sistematica e bene ordinata.

Il considerare le teorie scientifiche come allegorie, anzi come delle *mitologie*, fu una felice intuizione di un insigne matematico, Pasquale Del Pezzo, che nel discorso inaugurale per l'anno 1895 nell'Università di Napoli (« Le ribellioni della scienza ») confrontò dal punto di vista estetico le mitologie dei poeti greci con le mitologie degli scienziati moderni.

Le considerazioni che ora faremo hanno una portata generale. L'allegoria ed il mito sono i prodotti dell'*attività oggettivante* del pensare quale si esplica nei due campi diversi della conoscenza concettuale e della conoscenza speculativa. *Nella costruzione scientifica il traslato ha una fuzione unificatrice ed euristica.* Nel capitolo seguente di questo saggio si troverà una conferma di ciò nell'ultima elaborazione del concetto dell'infinito matematico. Ma, passando alle teorie della fisica, la funzione unificativa e creativa dei traslati si rivela ancora più chiaramente; essa non può sfuggire neanche in uno studio superficiale della scienza, nel significato della ipotesi, del *come se*; tanto più evidente essa appare a chi approfondisca i vari rami della fisica matematica sino alla teoria dei *quanta* ed alla teoria della relatività. Dalla fisica aristotelica alla fisica di Galileo e Newton, dalla meccanica classica alla prima relatività (Lorentz), dalla prima relatività alla seconda, si procede sempre da una unificazione imperfetta ad una unificazione superiore, e, nello stesso tempo, si presentano fatti nuovi e nuovi aspetti della realtà. Al non matematico sfugge, certo, l'insieme dei particolari tecnici della teoria (trasformazioni di Lorentz, spazio tetradimensionale, curvatura dello spazio ecc.), ma non può sfuggire questa

funzione unificativa e creativa dei sistemi d'ipotesi. Bisogna però evitare due errori: 1° confondere la costruzione scientifica della teoria della relatività con la metafisica di Einstein, che è l'empirio criticismo. 2° interpetrare i traslati in senso proprio. Il filosofo non tarderà a riconoscere che lo spazio ed il tempo della teoria della relatività non sono lo spazio ed il tempo della sua intuizione, ma sono lo spazio ed il tempo di Einstein (in senso trasferito). Dire, nella teoria della relatività, che lo *spazio è curvo* non significa altro che questo: nella detta teoria lo spazio degli avvenimenti risulta costruito in modo che i simboli di Riemann, *i quali per le superficie in senso proprio rappresentano la curvatura,* sono diversi da zero. E così lo spazio tetra dimensionale di Minkowski, nel quale la quarta dimensione è il tempo, lo spazio finito, sono spazi in senso traslato. Se tutti questi traslati s'interpetrano in senso proprio si arriva alla spiegazione dell'apporto degli spiritisti, si arriva a parlare sul serio di animali piatti a due dimensioni, i quali costretti a muoversi su una sfera la riterrebbero infinita, ed altri graziosi non sensi. Dí tutti questi *non sensi* è pieno l'ultimo libro di Maurizio Maeterlink intitolato « La vie de l'espace » (Paris 1928). L'esuberante fantasia conduce l'autore alla più inverosimile conclusione: noi siamo i fantasmi di uno spirito superiore: i nostri movimenti, la nostra volontà sono concetti di questo spirito.

65. La filosofia del come se di Vaihinger; il relativismo contemporaneo.

Le ipotesi, come tutti i traslati, non sono nè vere nè false, ma sono più o meno efficaci nel raggiungimento di uno scopo: *la progressiva unificazion e la scoverta.* Il travisamento del significato dell'ipotesi conduce direttamente alla filosofia del *come se (*Philosophie des Als-obst) di Hans Vaihinger, fusione intima dell'empiriocriticismo e del prammatismo. In questa filosofia si estende alla speculazione il significato falso dell'ipotesi come finzione ed errore. Recentemente un espositore delle teorie di Vaihinger giungeva a sintetizzarle cosí: « la finzione, il *come se,* appare come l'es- « senza stessa dell'umano pensiero, ogni processo del quale si riduce a por- « re una finzione ed a sviluppare le conseguenze. Tra verità ed errore « nessuna distinzione essenziale: una finzione poco utile è errore molto

« utile è verità ».[1] Bisognerebbe dunque ammettere uua realtà assoluta che sorge in contrapposizione alla finzione ed uno spirito ingannatore del quale l' umano spirito si fa schiavo. D' altra parte, in che consiste il carattere di utilità maggiore o minore di una finzione? e chi giudicherà? Si risponde: il successo. Ma qual' è la ragione del successo? Questa domanda resta senza risposta ed il vero significato del *come se* sfugge del tutto.

L' ipotesi non si presenta come *arbitraria*, ma come *necessaria* nel processo scientifico della progressiva unificazione, che porta sempre la scoverta di nuovi veri. Non si abbandona un' ipotesi se non per sostituirvi un' altra che adempia meglio la sua funzione unificatrice in una fase più progredita della costruzione scientifica; non è dunque un' efficacia di puro comodo, ma un' efficacia che è tutta nella funzlone unificativa dell' ipotesi. Se la costruzione scientifica si considera prescindendo dall' idea che in essa si attua (idea di causa nel suo significato infinito) la scienza appare come alterazione mutilazione e falsificazione del mondo della realtà, al quale si contrappone un mondo fantasticato e finto, fondamentalmente irreale. Allora non di *spiegazione* si tratta, ma di semplice ordinamento e disposizione in serie temporali e spaziali, cioè di semplice registrazione e computo; al criterio della verità si viene a sostituire il criterio della comodità e dell' utilità, ed alla sintesi ed all' analisi si sostituiscono i vari registri: libro giornale, libro mastro, tanto in partita semplice che in partita doppia, con un pizzico di logismografia. Tutte le affermazioni e le negazioni sono finzioni più o meno utili per il computo dei vari registri.

La filosofia del *come se* si collega intimamente con il relativismo contemporaneo,[2] che propugna l' equivalenza dei *punti di vista* e la negazione del progresso. Ogni osservatore, dal suo punto di vista, conosce la realtà *che è tutta nella collezione delle sue osservazioni*. Siccome nessun punto di vista è privilegiato non vi è più scienza ma solo un caos di opinioni ognuna delle quali pretende di esprimere la verità con egual diritto di tutte le altre. Si deduce da ciò la negazione del progresso e l' equivalenza delle culture (O. Spengler): nessun progresso c' è tra l' alchimia medioevale e e la chimica moderna, tra la concezione dell' *Essere* in Parmenite ed in Hegel, tra la concezione della scienza in Protagora ed in Poincarè. La

---

[1] Cfr. A. Tilgher: « Relativisti contemporanei ». Vedi l' esposizione e la critica nel mio libro: « Critica del terribilismo ». (ed. Albrighi e Segati 1924).

[2] A. Tilgher. Op. citata p. 36-37.

realtà è tutta e soltanto nella collezione delle osservazioni del primo cui salti il ticchio di mettersi a filosofare. « Dall' equivalenza di tutte le ideo-« logie, *tutte egualmente finzioni*, il relativista moderno deduce che, dunque « ciascuno ha il diritto di crearsi la sùa e d' imporla con tutta l' energia « di cui è capace » (Tilgher, op. citata p. 21). Ma dopo avere accumulate rovine su rovine, dopo aver negato in tutti i toni il significato dell' idea, il Tilgher conclude così: « L' atto con cui il pensiero acquista coscienza « della sua relativitá non è forse l' atto stesso in cui, insieme ed in un colpo « solo, attraverso la negazione, l' assoluto rifolgora e balena allo spirito? Ecco, dico io, *lo spegnitoio prende fuoco!* Questa nuova applicazione *ad hominem* del criterio della testimonianza ci riconduce a considerare la filosofia del *come se* nella sua giusta interpretazione, non come negazione pura e semplice dell' idea, ma come *negazione dialettica*, ossia come superamento del *momento finito* dell' idea del vero. Su tale argomento si possono con-consultare i notevoli lavori di Giovanni Marchesini [1] il quale riassume le massime morali del *come se* nella seguente formula; « Conquista l' Assoluto sebbene sfugga, come se non sfuggisse ».

66. **Superamento dialettico del principio di causalità.**

Come la sintesi della logica formale supera già il significato finito dei concetti, così la sintesi della dottrina della scienza ci spinge innanzi e ci fa passare al significato infinito dell' idea. La logica formale studia il processo logico in quanto si riconduce alla permanenza del significato dei concetti; le scienze positive studiano il cambiamento in quanto questo può ricondursi alla permanenza (momento astratto dell' attività del pensare).

Ma, in concreto, nel processo logico e nello svolgimento degli avvenimenti, interviene un principio di creazione per cui qualche cosa si produce. Nel passaggio dalla logica formale alla matematica abbiamo riconosciuto il carattere sintetico della costruzione scientifica, per cui soltanto può spiegarsi il processo creativo in atto nella scienza. Ed agli estremi confini della logica formale abbiamo riconosciuto dei processi logici (processi epimenidei) nei quali la stessa determinazione del concetto viene automaticamente a mutarsi in indeterminazione (n° 21). Qualche cosa di

[1] « Le ragioni fondamentali d' una pedagogia del *Come se* » Riv. Pedagogica 1931 fascicolo 1. Confronta ancora dello stesso autore « Le finzioni dell' anima (*B*ari 1905) e « La finzione nell' edncazione e la pedagogia del *come se* (Torino 1925).

simile possiamo ora notare nel principio di causa: quando diciamo che il complesso A di avvenimenti costituisce la condizione necessaria e sufficiente dell' avvenimento B, noi consideriamo il complesso A come perfettamente determinato, ma può accadere che il complesso A, per la sua stessa costituzione, si muti in altro. Nella fisica classica, inclusa la vecchia teoria dei *quanta*, la conoscenza dello stato iniziale di un sistema materiale conduce a prevedere lo stato del sistema al tempo *t* (rigoroso determinismo della conoscenza astratta). I progressi più recenti della fisica [meccanica *statistica*, còllegata intimamente con la meccanica ondulatoria, con la teoria della relatività e con la nuova teorta dei *quanta*), hanno posta in evidenza un' *imprecisione necessaria* in un esperimento ideale che si proponesse di definire la velocità e l' impulso di un elettrone circolante in un atomo in un' epoca qualunque. Se volessimo definire la posizione istantanea e la velocità di un elettrone dovremmo illuminare questo elettrone, ed allora all' osservazione sarebbe legato un' inevitabile *effetto Compton* per cui nell' urto tra un quanto di luce e l' elettrone la velocità di questo sarebbe alterata, più o meno secondo la piccolezza della lunghezza d' onda della luce adoperata. E se si riesce ad evitare l' effetto Compton, adoperando raggi di grande lunghezza d' onda, si può calcolare la velocità dell' elettrone, ma la imprecisione viene riportata all' individuazione del posto dell' elettrone a causa dell' *effetto Döppler.* Heisenberg ha dimostrato che il prodotto di queste due imprecisioni nella determinazione ideale del punto occupato dall' elettrone, e della sua velocità, è dello stesso ordine di grandezza della costante *h* di Planck (*principio d' indeterminazione.*)

Due notevoli conseguenze possono trarsi dal principio d' indeterminazione o d' imprecisione di Heisenberg: 1.° Nella meccanica del microcosmo è impossibile determinare lo stato di un sistema al tempo *t*; si può solo affermare che un elettrone, nell' evoluzione del sistema, si troverà al tempo *t* in un elemento dello spazio di fase il cui volume dipende dalla costante *h*. L' evoluzione del sistema è retta da leggi di possibilità e leggi statistiche.

Si rinunzia al vecchio rigido determinismo per ricondurre il principio di causalità al suo significato ideale: le leggi statistiche che reggono i fenomeni elementari e le leggi di probabilità alle quali ubbidiscono i singoli corpuscoli, dipendono da un complesso causale che si va svolgendo insieme con l' evoluzione del sistema materiale che si presenta all' esperimento.

2°. Poichè il complesso causale A può venire perturbato *per il solo fatto che esso è osservato*, si riconosce l' impossibilità logica di considerare

un fenomeno indipendentemente dai mezzi impiegati per studiarlo. Da ciò l'impossibilità di determinare le leggi dei fenomeni quali essi si svolgerebbero se nessuno li osservasse.

Le ultime scoperte della fisica ci mostrano dunque il senso in cui può esser vera la tesi della contingenza delle leggi della natura; conferma inaspettata delle profonde indagini speculative dei filosofi della scuola dell'*indeterminismo*, tra i quali si è distinto Émile Boutroux con la sua classica opera: « De la contingence des lois de la nature » [tesi di dottorato alla Sorbona, 1874].

Il principio d'indeterminazione di Heisenberg e la tesi speculativa della contingenza delle leggi naturali conducono, non alla negazione pura e semplice del principio di causalità (come nell'empiriocriticismo) ma ad un approfondimento del significato infinito dell'idea di causa.

Un'idea *nel suo significato finito* non può negarsi se non passando dall'astratto al concreto, cioè dal significato finito al significato infinito; è in questo passaggio che consiste il superamento dialettico dei principî della conoscenza astratta. La rivelazione del significato infinito dell'idea si ha nella stessa attività oggettivante del pensiero, che nelle grandi sintesi si mostra nei sistemi d'ipotesi e nelle allegorie. La determinazione della funzione unificativa e creativa del traslato si presenta come il problema fondamentale della dottrina della scienza e conduce al superamento della filosofia del *come se*, superamento che è anche un *inveramento*.

Come gli ultimi progressi della fisica hanno prodotta una crisi nei principî della scienza (nuovo modo d'intendere il principio di causalità,) così gli ultimi risultati dell'alta analisi riguardanti la teoria del transfinito hanno creato una crisi nei principi della matematica, crisi che coinvolge la stessa validità logica delle scienze. Quale debba essere la soluzione di questa crisi vedremo nel capitolo seguente.

CAPITOLO 2°

L' INFINITO MATEMATICO COME INFINITO ASTRATTO.

67. Osservazioni premilinari.

La critica del calcolo infinitesimale fatta da Hegel nella sua logica non si riferisce ai difetti formali della prima costruzione della teoria (difetti che furono eliminati in seguito con il contributo di diverse generazioni di scienziati), ma addirittura ai concetti fondamentali di infinito e di infinitesimo.

« Il quanto infinito, come infinitamente grande o infinitamente piccolo « è esso stesso in sè il progresso infinito; *è un quanto* poichè è un grande « ed un piccolo, ed è in pari tempo *non essere del quanto*. L'infinitamente « grande e l' infinitamente piccolo sono quindi figure della rappresentazione, « che ad una considerazione più particolare si danno a vedere come vana « nebbia ed ombra ».[1] In sostanza Hegel considera il *quanto* nel senso proprio e perciò nella sua critica, che occupa quasi tutta la sezione seconda del libro I della *Logica*, non scalfisce neanche il calcolo infinitesimale come sistema di allegorie. Il *quanto* come grande o piccolo è la grandezza in senso proprio, l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo sono grandezze in senso trasferito. La contraddizione si mostra solo nel passaggio arbitrario dal significato proprio al significato trasferito.

Il *finitista* e l' *infinitista* discuteranno all' infinito senza intendersi, se il primo parla di grandezza in senso proprio ed il secondo di grandezza in senso trasferito. Così sono sorti i *paradossi dell' infinito*, che perdono in

[1] Hegel: « La scienza della logica » traduzione di A. Mori, Bar*i* 1925 (Libro 1° sezione 1ª p. 282 del vol. 1°).

un momento l' aspetto di paradossi quando si pone in evidenza il traslato.

La discussione come inutile logomachia cessa ed è sostituita da una indagine critica di valore scientifico e filosofico su la funzione del traslato nella teoria. Che il traslato si sia formato ed organizzato, e che esso abbia esplicata in pieno la sua funzione unificatrice ed euristica, sono fatti innegabili, che si possono anche considerare come segno e rivelazione dell' infinito concreto.

Oggi, a tanta distanza dai tempi di Hegel e dopo tanti progressi della matematica', non dobbiamo limitarci a considerare l' infinito e l' infinitesimo del calcolo infinitesimale, ma dobbiamo indagare l' espressione matematica più compiuta dell' infinito; noi troveremo nelle curve del tipo di von Koch tale espressione e dalle teoria degl' *insiemi* faremo scaturire il carattere astratto dell' infinito matematico. La determinazione dei caratteri distintivi dell' infinito dei matematici e dell' infinito dei filosofi costituirà il più notevole risultato del presente saggio.

68. Insiemi numerabili ed insiemi non numerabili.

È perfettamente nota la serie naturale dei numeri interi 1, 2, 3, ... n, ...; essa è il presupposto necessario di tutto quello che diremo.

La ricerca di tutti gli enti che godono di determinate proprietà può dare uno dei risultati seguenti: 1° *Nessun ente ha quelle proprietà* Es: nessun poliedro regolare può avere faccie esagonali (insieme o classe *nulla*).

2° *Si possono dare solo* n *enti che abbiano quella proprietà, ove* n è *perfettamente determinato.* Es.: i poliedri regolari sono cinque: tetraedro, esaedro, ottaedro. dodecaedro, icosaedro (insieme finito). 3° *costruiti* n *enti che abbiano quella proprietà, è possibile costruirne ancora altri,* e ciò qualunque sia *n.* Es.: determinato il triangolo equilatero, ... l' n-gono regolare, si può determinare ancora il poligono regolare di n + 1 lati, qualunque sia *n* (insieme infinito).

Un insieme infinito si dirà numerabile quando esiste un criterio che permetta di determinare l' elemento da dirsi *primo*, l' elemento da dirsi *secondo*, ... l' elemento da dirsi n^{mo} *qualunque sia n,* e ciò in modo che nessun elemento dell' insieme sfugga a tale criterio di successione. Allora l' insieme si può rappresentare mediante una successione: a_1, a_2, a_3, ... a_n, ... ove l' indice esprime il numero d' ordine dell' elemento. Es: 1°

La successione dei numeri primi:

$$a_1 = 1 ; \; a_2 = 2 ; \; a_3 = 3 ; \; a_4 = 5 ; \; a_5 = 7 ; \ldots\ldots$$

Es: 2°: La successione dei multipli di 3:

$$a_1 = 3 ; \; a_2 = 6 ; \; a_3 = 9 ; \ldots\ldots \; a_n = 3n , \ldots\ldots$$

Quando diciamo che a_n è *determinato qualunque sia n*, noi prescindiamo del tutto dalle difficoltà pratiche le quali possono presentarsi per l'effettiva ed attuale determinazione di a_n. Così, mentre il miliardesimo multiplo di 3 non solo è determinato, ma é anche *ostensibile* (3000000000), nessuno potrà mai dirci qual'è il miliardesimo numero primo, pur essendo questo teoricamente determinato (è determinato, ma non ostensibile).

Consideriamo ora la totalità dei numeri reali compresi tra zero ed uno. Dalle ricerche di Giorgio Cantor risulta che questo insieme *non è numerabile*, cioè che non può darsi alcun criterio che permetta di attribuire ad ogni suo elemento un numero d'ordine. *Ciò vuol dire che in qualunque modo si trasferisca il significato delle parole* SUCCESSIVO DI, *non si potrà mai presentare l'insieme come una successione.*

Un insieme numerabile non solo è determinato in blocco dalle proprietà comuni dei suoi elementi p. e. (l'esser numeri primi), ma anche nei singoli elementi in modo che la totalità può dirsi nota quando risulta determinato il suo elemento a_n *qualunque sia n*. Invece, un insieme non numerabile è determino solo in blocco dalle proprietà comuni dei suoi elementi (p. e. l'essere un numero reale compreso tra zero ed uno); non essendo possibile alcun ordinamento in successione, non si potrà parlare di un elemento n^{mo}.

69. Equivalenza degl'insiemi; la parte ed il tutto; il primo paradosso dell'infinito.

Due insiemi M, N diconsi equivalenti quando tra di essi si può porre una relazione tale che ad un elemento di M rimanga *associato* un elemento solo di N, e ad ogni elemento di N un elemento solo di M (corrispondenza biunivoca).

Es.: 1° Sia M l'insieme dei numeri interi e positivi ed N l'insieme dei quadrati dei numeri interi. Ad ogni numero intero e positivo *n* po-

tremo associare il suo quadrato n^2; ad un intero quadrato esatto m^2 associeremo il numero intero e positivo m. Dunque i due insiemi:

$$M \equiv 1 ; 2 ; 3 ; .., n ...$$
$$N \equiv 1 ; 4 ; 9 ; ... n^2 ...$$

sono equivalenti, cioè si possono porre in corrispondenza biunivoca.

Es.: 2°. Sia M_1 l'insieme (non numerabile) dei punti del quadrato costruito sul segmento OI; N_1 sia l'insieme, anch'esso non numerabile, dei punti del segmento OI. Uno dei più importanti risultati delle ricerche di Cantor è la dimostrazione dell'equivalenza di questi due insiemi. Cioè si può affermare che tra questi due insiemi può porsi una corrispondenza tale che ad ogni punto del quadrato corrisponda un punto del segmento ed uno solo, e ad ogni punto del segmento corrisponda un punto del quadrato ed uno solo.

L'insieme $M \equiv 1, 2, 3, ... n, ...$ contiene gli elementi dell'altro insieme $N \equiv 1, 4, 9, ... n^2, ...$ ed ancora altri infiniti elementi 2, 3, 6, ... (numeri interi non quadratti esatti). Ciò si esprime dicendo che N è una *parte propria* (echter Theil) di M. Lo stesso accade per l'insieme M_1 che contiene come parte propria N_1. Dunque un insieme, numerabile o no, può essere equivalente ad una sua parte. Ciò non può avvenire per gl' insiemi *finiti*. Dedekind nella sua opera « Was sind und was sollen die Zahlen » ha stabiliti i fondamenti dell'aritmetica dei numeri in teri sul concetto dell'equivalenza degl' insiemi; egli definì gl' insiemi infiniti come quelli che possono risultare equivalenti ad una loro parte propria.

I concetti di *tutto* e di *parte*, intesi in senso stretto, cioè in senso proprio, sono legati mediante l'assioma: « La parte è minore del tutto ». Sorge allora il primo paradosso dell'infinito: *la parte equivalente al tutto.* Se le parole *parte, tutto, equivalente, maggiore e minore* s' intendono in senso proprio (nel finito), la proposizione che si esprime dicendo: la parte può essere equivalente al tutto » è assurda (posizione del *finitista*). Ma alle parole stesse si può dare un senso trasferito tale che la detta proposizione abbia un senso determinato, *ed in tale senso sia vera* (posizione dell' *infinitista*). Ogni discussione tra il finitista e l'infinitista dovrà dunque ridursi ad una logomachia in cui i due avversari usano linguaggi diversi senz' alcuna probabilità d' intendersi. L'uno vede sempre innanzi a sè quei numeri 2, 3, 5, 6.... che sono nell'insieme M e non si tro-

vano nell' insieme N (perchè intende *parte* e *tutto* in senso proprio); l' altro non vede che la corrispondenza biunivoca ed i due insieme M, N situati elemento per elemento, l' uno sotto l' altro (perché intende l' equivalenza, la *parte* ed il *tutto* in senso trasferito). Così ad es. Cosimo Guastella ha impiegato un' ottantina di pagine per criticare il concetto infinitista di *tutto equivalente a parte*, intendendo sempre *tutto, parte* ed *equivalenza* insenso proprio [1].

70. **Un altro traslato: l' ordine di sequenza.**

Sia M un insieme lineare qualsiasi dell' intervallo 01: è possibile determinare un criterio di ordinamento in modo che di due elementi qualsiansi a. b possa dirsi quale precede e quale segue; basterà adoperare queste parole in senso proprio e dire che a *segue* b quando percorrendo Il segmento 01 da 0 verso 1 l' elemento a viene dopo b. Un elemento si dirà primo quando non ha precedenti ed ultimo quando non ha seguenti. il criterio di ordinamento si può anche determinare in modo che le parole *seguente* e *precedente* abbiano un senso trasferito, come si vedrà nell' esempio dell' insieme delle frazioni comprese tra 0 ed 1. Questo insieme è *numerabile* ed il criterio di successione di Cantor ci porta ad ordinare gli elementi cosi:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3}\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4, = \frac{2}{3},\ a_5 = \frac{1}{5}\ .\ a_6 = \frac{1}{6},\ a_7 = \frac{2}{5};\ldots.$$

Si considera cioè la somma m dei due termini di una frazione e si ordinano le frazioni secondo i valori crescenti di m. Si escludono $m = 1$ ed $m = 2$ perchè si troverebbero $\frac{0}{1}$ ed $\frac{1}{1}$ coincidenti rispettivamente con 0 ed 1. Per $m = 3$ si ha $\frac{1}{2}$ (*prima frazione* secondo questo criterio); per $m = 4$ si trovano $\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$, ed escludendo $\frac{2}{2}$ che è 1 e $\frac{3}{1}$ che è maggiore di 1, resta $\frac{1}{3}$ come *seconda frazione dell' insieme*,: per $m = 5$ si trovano $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{3}{2}\right.$ e $\frac{4}{1}$ si escludono perchè maggiori di $\left.1\right)$; per $m = 6$ si trovano $\frac{1}{5}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}$, ed escludendo le frazioni maggiori

[1] *C. Guastella*: « L' infinito » (Annnario della biblioteca filosofica di Palermo) 1912).

di 1 e $\frac{2}{4}$ già trovata, resta $\frac{1}{5}$ come quinta frazione dell'insieme, e così si può continuare illimitatamenfe.

Il trasferimento del significato dell' ordinamento ci dà un altro paradosso: « Nell' insieme di tutte le frazioni comprese tra 0 ed 1 esiste una prima frazione ed è $\frac{1}{2}$ ». Se rimanete fermo nell' attribuire alla parola *primo* il suo significato proprio, direte che la proposizione è assurda, perchè prima di $\frac{1}{2}$ c'è $\frac{1}{3}$. c'è $\frac{1}{5}$ ecc. L'assurdità sparisce quando dal senso proprio passate al senso trasferito di Cantor.

Un insieme dicesi *bene ordinato* quando esso ed ogni sua parte propria hanno un primo elemento. È chiaro che ogni insieme numerabile è bene ordinato; si possono inoltre costruire infiniti insiemi non numerabili pure bene ordinati. Zermelo affermò che ogni insieme continuo è bene ordinato, cioè che la continuità di un insieme si può esprimere in modo da poter dare all' ordinamento un senso trasferito tale che sia possibile dimostrare che l' insieme e tutte le sue parti abbiano un primo elemento (teorema di Zermelo). La dimostrazione, la cui validità logica è stata contestata, si basa su questo postulato: « Dato un insieme M infinito, è sempre possibile considerare a parte, cioè *scegliere*, un suo elemento A, poi tra i rimanenti scegliere un altro B e così via illimitatamente » Questa proposizione era stata implicitamente applicata da secoli, Zermelo per il primo l' ha espressamente enunciata come postulato ed ha cercato di dedurne la possibilità di *bene ordinare* tutti gl' insiemi continui.

Dal 1905 al 1908 si ebbe sulle più importanti riviste di matematica una gran polemica sulla validità del teorema di Zermelo; la discussione si estese anche alla « Rèvue de methaphysique »; vi presero parte Borel, Baire, Hadamard, Lesbesgue, Poincarè, Schönflies, Hardy, lo stesso Zermelò, Bernstein ed altri. Ebbene, tutta la quistione si può riassumere brevemente così: il cosiddetto teorema di Zermelo è e rimane (anche dopo gli studi più recenti) di dubbia validità, perchè nè nella prima dimostrazione nè nella seconda, nè nel tentativo di costruire il sistema completo dei principî della teorià degl' insiemi, Zermelo è riuscito a determinare il senso trasferito in cui debbono essere intese le parole *precedente* e *seguente*. Il dubbio che questo senso trasferito non possa in nessun modo essere determinato é giustificato da un fatto: se un insieme infinito non è numerabile in qualunque modo s' intenda la frase *successivo di*, la proposizione: « e-

siste il successivo di un elemento qualsiasi dell' insieme » é falsa. Ora, come nel passaggio dagl' insiemi numerabili agl' insiemi non numerabili è impossibile trasferire il senso delle parole *successivo di*, nel passaggio dagl' insiemi discontinui agl' insiemi continui potremmo trovarci nell' impossibilità assoluta di trasferire il senso delle parole *precedente* e *seguente*.

71. **I numeri transfiniti; significato del secondo principio di Cantor.** Consideriamo un insieme lineare numerabile i cui elementi siano rappresentabili come punti di un segmento, ad es: le frazioni comprese tra zero ed 1, *escluso lo zero*. Chiamasi *punto limite* di un insieme un punto tale, che scelto intorno ad esso un intervallo piccolo a piacere, in questo intervallo vi siano sempre infiniti punti dell' insieme. Si dimostra che ogni insieme compreso in un intervallo limitato ha almeno un punto limite. Chiamasi *insieme derivato* di un insieme P (e si indica con P ') l'insieme dei punti limiti di P; può darsi che P ' abbia esso stesso un insieme derivato P ' ' (secondo derivato di P), che P ' ' abbia un insieme derivato P ' ' ' e così via.

Un insieme finito non ha punti limiti, cioè il suo insieme derivato è un insieme nullo. L' insieme P $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right)$ ha un solo punto limite, lo zero, perchè nelle vicinanze di zero vi sono infinite frazioni della forma $\frac{1}{n}$. In ogni intervallo $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$ di P inseriamo un insieme equivalente a P e che abbia $\frac{1}{n+1}$ come punto limite; risulterà un insieme Q che ammetterà come punti limiti tutti i punti di P e perciò Q' = P, Q'' si riduce ad un punto e Q''' è un insieme nullo. In ogni intervallo di Q inseriamo un insieme equivalente a Q ed avremo un insieme R per cui R' = Q, R'' = Q', R''' si riduce ad un punto ed R^{IV} é un insieme nullo. Così continuando si può trarre dall' insieme primitivo P un insieme P_n avente *n* insiemi derivati successivi non nulli. In ogni intervallo, $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$ di questo insieme inseriamo un insieme equivalente a P_n e che abbia lo zero come n^{mo} derivato; otterremo un insiemo K che avrà infiniti insiemi derivati successivi K', K'',.... $K^{(n)}$,... Tutti questi avranno un insieme comune $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots\ldots\right)$ il cui insieme derivato si riduce al punto zero. *Se questo si continua a chiamare insieme derivato di K'* potrà affermarsi che esso costituisca l' *infinitesimo insieme derivato* di K. Indicandolo con $K^{(\omega)}$, l' insieme derivato si dovrà indicare con $K^{(\omega+1)}$.

Cantor, servendosi del procedimento d' inserzione ora accennato, arrivò a costruire insiemi K sempre più complessi, tali cioè che $K^{(\omega)}$ abbia infiniti insiemi derivati; allora l' insieme comune a questi si dovrà indicare con $K^{(\omega + \omega)}$ ossia con $K^{(2\omega)}$. Può darsi che anche $K^{(2\omega)}$ abbia ancora altri infiniti insiemi derivati; l' insieme comune a questi si dovrà indicare con $K^{(2\omega + 1)}$ e così via.

Ai simboli ω, $\omega + 1, \ldots. 2\,\omega, 2\,\omega + 1, \ldots. \omega^2 \ldots. \omega^\omega \ldots..$ indicanti l' ordine delle derivazioni successive possibili, *oltre il finito,* in alcune ben determinate categorie d' insiemi, si dà il nome di numeri *transfiniti ordinali.* Per la formazione di questi numeri Cantor si serve di due principî: 1° Addizione di un' unità, per cui da un insieme derivato si passa al successivo. Ma in tal modo non si arriverebbe mai ad un ordine di derivazione superiore a tutti gli altri; allora interviene il 2° principio con il quale si supera questa difficoltà: « non esiste un intero maggiore di « tutti gli altri, dunque creiamo un nuovo simbolo ω, *che continueremo a « chiamare numero intero*, e che considereremo, *per definizione*, maggiore di « tutti i numeri interi 1, 2, ... n, ...» A questo si riduce, in sostanza il 2° principio di Cantor. Sembra, a prima vista, che tale principio non sia altro che la pura e semplice negazione del principio di contraddizione: « *non esiste un numero intero maggiore di tutti gli altri, ma intanto esiste « ed è* ω » Il superamento della contraddizione si ha, come nei casi precedentemente notati, mediante il passaggio dal senso proprio al senso traslato. Dicendo: non esiste nn numero intero maggiore di tutti gli altri, intendiamo *numero intero* in senso proprio; dicendo invece: ω è il numero intero transfinito immediatamente superiore a tutti i numeri interi, intendiamo *numero intero* in senso traslato.

Analoghe considerazioni potremo fare per i numeri cardinali tranfiniti (numeri aleph).

Due insiemi finiti equivalenti sono composti dello stesso numero *n* di elementi; il numero cardinale *n* risulta per astrazione da tutti gl' insiemi equivalenti (numerosità o *potenza* dell' insieme). Questo concetto si può trasferire agl' insiemi infiniti; numerabil e non numerabili. Poichè tutti gl' insiemi numerabili sono equivalenti, essi hànno la stessa *potenza,* che si indica con *aleph con zero.* Gl' insiemi non numerabili non sono mai equivalenti ad insiemi numerabili; se si considerano solo quelli che sono equivalenti all' insieme dei punti del segmento O 1 (continuo lineare), la

loro potenza s' indicherà con *aleph con uno*. Le potenze di insiemi non numerabili ancora più complessi si indicheranno con altri numeri *aleph*.

Ai numeri transfiniti delle varie classi ed ai numeri *aleph* si trasferisce il carattere di grandezza, in modo da rendere possibile il calcolo; questa è la parte più riposta della teoria degl' insiemi, i cui particolari tecnici dobbiamo necessariamente omettere.

Tre cose si possono giustamente chiedere al matematico in tutte queste generalizzazioni e trasferimento di senso: 1^0, che il nuovo significato sia perfettamente determinato; 2^0, che nel trasferimento di senso resti qualche traccia del *senso proprio*; 3°, che risulti la necessità e l' utilita del traslato, cioè la sua funzione unificatrice ed euristica. Ora:

a) I numeri tranfiniti di Cantor sono ben determinati e chiaramente spiegati mediante opportune operazioni su insiemi perfettamenti definiti e costruiti (ordine di derivazione, potenza degl' insiemi).

b) Il concetto di ordine e successione, in quello che ha di essenziale, è conservato nel trasferimento, però con le opportune differenze: mentre immediatamente prima di *n* v' è *n-1*, immediatamente prima di ω non c' è il precedente; il numero ($\omega + 1$) è perfettamente determinato nell' ordine di derivazione ($K^{(\omega+1)}$ è il derivato di $K^{(\omega)}$) ed invece $\omega - 1$ non significa nulla, poichè $K^{(\omega)}$ non ha un derivato immediatamente precedente.

c) La teoria dei numeri transfiniti, ed in generale la teoria degl' insiemi, ha prodotti immensi progressi nell' analisi; mentre da una parte si è potuto approfondire sempre più la teoria delle funzioni, molte conquiste sono state fatte nell' analisi matematica rigorosa dei concetti di lunghezza di una curva, area di una superficie, volume di un solido. Sovratutto si deve alla teoria degli insiemi la più completa elaborazione del concetto del *continuo matematico*.

72. **Dal VETO di Poincarè alla negazione del principio del terzo escluso; le nuove teorie logiche di Hilbert.**

Le difficoltà logiche, inevitabili nella costruzione della teoria degl' insiemi e dei numeri transfiniti, produssero una *crisi* nei fondamenti della matematica. Non si potè evitare l' interferenza della metalogica ed i principii della scienzaa si presentarono come una rete indestricabile di paradossi e di antinomie. Poincaré, dopo un' accurata unalisi dell' antinomia di Russel, tagliò il nodo gordiano. I seguaci della nuova logica russelliana adoperarono definizioni non sostituibli al termine definito (definizioni *non*

predicative). Da ciò il *veto* posto all' uso di proposizioni non predicative e la negazione del transfinito come infinito attuale: Il n' y a pas d' infini actuel; les cantoriens l' ont oubliè, et ils sont tombés dans la contradiction » [1] (« Science et mèthode » cap. 5° del libro 2°).

Nelle discussioni che seguirono il *veto* di Poincarè due opposti punti di vista si presentarono, rinnovando cosí una vecchia tesi di Paolo du Boys Reymond sul duplice modo d' intendere i principii della matematica: la concezione idealista e la concezione empirista. Agli argomenti dell' empirista di du Boys Reymond, nuovi se ne aggiunsero, sino a quando Brower e Weyl [2] non credettero di far *tabula rasa* degli stessi principii della logica, mettendo il *veto* all' impiego del principio del terzo escluso. Ultimamente un' interessante polemica tra R. Wavre e P. Lèvy si è svolta su la « Revue de Mèthaphysique ». Il Wavre pone in evidenza il concetto dell' evoluzione delle stesse proposizioni matematiche quale risulta dalla *nuova logica* di Brower Weyl e cerca di mostrare in quale senso può negarsi il principio del terzò escluso. Finchè non fu dimostrata la trascendenza di π questo numero non poteva affermarsi né algebrico nè trascendente; esso *divenne* trascendente dopo i classici lavori di Hermite e di Lindmann. Ancora, se in numero n è razionale, ma allo stato attuale della scienza non può indicarsi il posto nella successione dei numeri razionali, n è da escludersi dalla nostra considerazione, esso *diventerà veramente razionale* quando si potrà indicare quel posto. Lévy risponde che il carattere di trascendenza di π è una proprietà intrinseca di π per cui questo è trascendente indipendentemente dall' epoca in cui questo carattere sarà riconosciuto, e che è assurdo dire che n non può considerarsi come razionale, *pur essendolo*, sino a quando non sarà trovato il suo posto nella serie dei numeri razionali. Se un numero è reale, esso sarà algebrico o trascendente e *se non è algebrico è trascendente*. Il principio del terzo escluso non può negarsi. Nella discussione dell' empirista e dell' idealista siamo così arrivati al punto cruciale e viene messo in evidenza l' equivoco fondamentale preso dall' empirista. Costui confonde il *determinato* con l' *ostensibile*. Il poligono di 6 lati inscritto nel circolo è determinato ed ostensibile; il poligono

---

[1] *Brower*: « Intuitionism and Formalism » (American Bnlletin 1913); Intuitionistische Mengenlehre (Yahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung 1919) ecc.

[2] *Weyl*: « Das Kontinuum » 1918; Uber die nene Grundlagenkrise der Mathematik (Math. Zeitschrift 1921) ecc.

di un miliardo di lati, *pur essendo determinato* non è ostensibile (nessuno può *presentarlo*); Brower e Weyl diranno che non esiste. Si aggiunga che l' ammissione di proprietà che si svolgono e che non sussistono se non quando qualcuno può dimostrarle, può condurre a questa umoristica conclusione, che la terra cominciò a muoversi intorno al sole nel momento preciso in cui Copernico od altri lo dimostrò.

David Hilbert é senza dubbio un rappresentante della concezione idealista dei principî della scienza. Tra il *veto* di Poincarè e le *nuove logiche* egli ha cercato di fondare una sua propria teoria per risolvere la crisi. In una comunicazione al Congresso di Bologna [1], dopo un accenno al *veto* di Poincarè ed alle teorie logiche di Russell, egli disse: « Così « avvenne che la nostra amata scienza, per ciò che riguarda i suoi fondamenti stessi è stata afflitta da un incubo (von einem bösen Traum) durato un ventennio » e salutò come un felice risveglio il tentativo recente di un gruppo di giovani matematici tedeschi, i quali, non curanti del *veto* di Poincarè, hanno cercato di determinare il significato delle proposizioni non predicative di Zermelo in modo da porre il risultato della sua indagine al riparo da obbiezioni. Ma il successo non ha ancora coronata la loro fatica, e solo l' *assiomatica* posta su nuove basi può dare la soluzione del problema. Il notevole tentativo di Hilbert in questa direzione è, purtroppo, anch' esso destinato all' insuccesso perchè nell' ultima opera « Grundzüge der theoretischen Logik » scritta da Hilbert in collaborazione di W. Ackermann (1928) si nota sempre l' interferenza della metalogica nella logica. Tutte le proposizioni non predicative sono riunite in una unica, l' assioma del transfinito. Sia E un insieme ben definito, *e* un elemento dell' insieme ed A un attributo qualsiasi, ben definito anch' esso relativamente ad ogni elemento dell' insieme. Si postula l' esistenza di un elemento *t* dell' insieme, tale che, se esso possiede l' attributo A, ciò implica che tutti gli elementi lo posseggono del pari. Così, nell' esempio presentato da Hilbert, se E è l' insieme di tutti gli uomini, ed A è lo attributo è *essere corruttibile*, l' oggetto scelto *t* sarebbe un uomo di una tale inviolabile incorruttibilità che, se egli è corruttibile, tutti gli uomini lo sono. Ebbene, se si cerca di dare un senso a questo postulato, non si tarderà a riconoscere in esso il principio d' induzione completa: dimostrato che se una proprietà vera per *n* è vera anche per n+1, se la

notevole interferenza di logica e metalogica

[1] « Atti del Congresso internazionale dei matematici » 1928 (Vol. 1° p. 138).

proprietà è vera per 1 sarà vera per tutti gli n. Una generalizzazione al transfinito sarà solo possibile se si può costruire un sistema di traslati in seguito ai quali risultino perfettamente determinati il concetto rappresentato da E e l' attributo A. Se questo sistema è ancora *in fieri* e la quistione di Zermelo non è ancora risoluta, ciò vuol dire che non si sono evitate le proposizioni prive di senso e non si sono rispettate le leggi della logica formale, ma non si può affermare che è venuta meno la validità logica della matematica.

73. **Considerazioni finali su la validità logica della matematica.**

La quistione è duplice: la *validità formale* va esaminata nel campo proprio della logica formale e della matematica; la *validità concreta* va discussa nel campo proprio della gnoseologia e della filosofia in generale.

Escluse fin dal principio le proposizioni prive di senso, determinate le condizioni necessarie e sufficienti della definizione del concetto e della permanenza del suo significato, e determinate le condizioni necessarie e sufficienti della coerenza interiore dei processi logici, riesce possibile, *con la costruzione del sistema completo,* la dimostrazione dell' invarianza del valore verità delle proposizioni, che dai principî viene trasmesso alle conseguenze. Dimostrata l' assenza di contraddizione nei principî se ne deduce l' assenza di contraddizione in tutto lo sviluppo. Viene dunque confermata la validità logica della matematica, anche se qualcuno dei sistemi completi, come quello che si riferisce alla teoria degl' insiemi transfiniti, è ancora *in fieri.* (I due capitoli della prima parte di questo saggio).

Nella risoluzione dell' altra quistione, cioè della validità reale della matematica, è necessaria la più stretta collaborazione di scienza e filosofia. Si tratta di determinare la natura della conoscenza matematica, e questa non può risultare che da un' indagine profonda su l' attività stessa del pensiero che si realizza nella scienza. Quest' indagine io ho cercato di condurre a termine in questo capitolo e nel precedente. Riconosciuto il carattere sintetico della conoscenza matematica, la sua validità reale è tutta nella *funzione oggettivante* dell' attività stessa del pensiero nella organizzazione delle categorie e nella formazione dei sistemi di traslati. Abbiamo visto anche la funzione del traslato nella costruzione stessa del sistema completo nella geometria e nella teoria degl' insiemi. Si ha allora anche un' indicazione sulla via da seguire nella formazione del sistema

dei principî della teoria del transfinito, che dovrà consistere nell' opportuna determinazione di nuovi sistemi di traslati.

74. Il TUTTO IN TUTTO; **la teoria infinitista di Royce.**

Torniamo ora al concetto dell' infinito matematico per determinare i caratteri che lo distinguono dall' infinito concreto dei filosofi.

L' insieme numerabile o non numerabile ci si presenta, in un certo senso, come un *totum simul*, al quale si può applicare il predicato di *tutto in tutto*, perchè le parti sono equivalenti o simili all' intero. Siamo così arrivati, pur restando nell' *infinito determinato* dei matematici, ad una delle realizzazioni dell' idea del *tutto in tutto* di Anassagora (παντα εν παντί). Josiah Royce, nella sua opera fondamentale: « The world and the individual » ha tentato di svolgere la concezione dello *spirito* come infinito concreto, trasferendo alla speculazione filosofica questo importante concetto matematico del *tutto in tutto*: « Il vero universo, il mondo dei « valori, visto da dentro, si presenta come un mondo di coscienze social- « mente collegate, formando nell' unità del loro sistema *una* coscienza (one « Self). Ebbene, allo stesso modo come un insieme può ritenersi *equiva-* « *lente* a ciascuna delle sue parti proprie, così l' *io individuale*, quan- « tunque sia una parte dell' infinito sistema degl' individui, pure può essere « concepito come *strettamente eguale* per infinità di struttura e varietà di « contenuto, all' assoluto, *having a series of experiences precisely as rich* « *in its details, a knowledge precisely as multitudinous, a meaning preci-* « *sely as complex as the Absolute Self in its wholeness* ». Per conseguenza noi non possiamo concepire l'individuo, per quanto parziale possa essere, come in un certo senso *inferiore* nel grado di complicazione della sua attività all' Assoluto. Invece dobbiamo concepire l' individuo *come una parte eguale all' intero*, e finalmente, come eguale, riunito a quest' intero in cui risiede.

Questa concezione, svolta con grande acume speculativo dal Royce, termina con l' affermazione della trascendenza dell' *Eternal Self* e conduce ad una visione monadistica della realtà spirituale. Il neo monadismo contemporaneo, nelle varie sue forme, si ricollega più o meno al sistema di Royce.

Il Royce, che dalla sua profonda distinzione tra l'*external* e l'*internel meaning of ideas* poteva assurgere alla concezione dell' infinito concreto, rimase fermo nell' infinità degl' insiemi della matematica; l'infinito astratto degl' in-

siemi: « Our conclusion ist hat the true series of facts in the world must be « a well ordered series, in which every fact has its next following fact. » Altro cammino ci rimane da fare per giungere alla nostra meta, ma la visione di Royce costituisce già un gran progresso sulle teorie infinitiste dei matematici puri, da Bolzano a Russell. Bolzano, nella sua opera: « Paradoxien des Unendlichen » pose le prime basi della teoria degl'insiemi e nei numeri 11 e 25 estese senz'altro all'Assoluto i concetti di molteplicità e grandezza infinita. Egli affermò che Dio, l'assoluto, il Tutto sono infiniti nel senso matematico, cioè dal punto di vista della *pura grandezza*, della pura molteplicità e, mentre nello sviluppo matematico è un perfetto nominalista, nelle sue vedute metafisiche arriva a conclusioni ultra realistiche. Lo stesso atteggiamento assume, tra i nostri contemporanei, Bertrand Russel che ha rinnovate amplificandole, le teorie di Bolzano.

75. **Ulteriore realizzazione del tutto in tutto; le curve di von Koch.** Da una memoria di Ernesto Cesaro: « Remarqes sur la courbe de von Koch » (atti della Reale Acc. di Napoli, 1903) possiamo trarre alcune importanti considerazioni su uno speciale insieme di punti la cui rappresentazione geometrica è adatta a darci una nuova interpretazione del *tutto in tutto*. Sia A B C un triangolo isoscele con gli angoli alla base di 30° (fig. 1ª); diviso il lato A B in tre parti eguali, nei punti D, E, congiungiamo questi punti con C; avremo così il triangolo equilatero C D E ed i due triangoli A D C, C E B isosceli e che hanno, come il primo, gli angoli alla base di 30°. Togliendo il triangolo D C E resterà la ffg, 2 che rappresenta una porzione di piano avendo per contorno la due spezzate A C B, A D C E B. Ripetendo sui triangoli A D E, C E B la stessa operazione si avrà la fig. 3 il cui orlo interno è la stessa spezzata A D C E B di prima ed il cui orlo esterno è una spezzata nuova. Sui triangoli che si presentano sulla figura 3 si può ripetere ancora l'operazione, e si avrà la fig. 4 nella quale l'orlo esterno è identico all'orlo esterno della fig. 3 e l'orlo interno dà una nuova spezzata. Sui triangoli che si presentano nella fig. 4 ripetiamo ancora l'operazione ed arriviamo alla fig. 5 in cui l'orlo interno è dentico alla all'orlo interno della fig. 4 e l'orlo esterno dà una spezzata nuova. Ripetendo la stessa operazione sui triangoli della fig. 5ª si avrà la fig. 6 nella quale l'orlo esterno è identico all'orlo esterno della fig. 5 e l'orlo interno dà ancora un'altra spezzata. Questo procedimento è illimitatamente proseguibile e ci fornisce un insieme di punti perfettamente

determinato da due funzioni continue, che sono studiate a fondo da Cesaro,

Dal punto di vista della continuità in senso matematico, il detto insieme rappresenta una curva, proprio come l'insieme di punti determinato dall'equazione $y = x^2$ (parabola), con questa differenza: l'insieme di punti presentato da un arco di parabola può descriversi col moto continuo di un punto (curva in senso proprio); l'altro insieme, invece, è determinato soltanto dalla sua legge di formazione che ci permette di passare dalla prima approssimazione alla seconda dalla seconda alla terza e così via.

FIG. 1

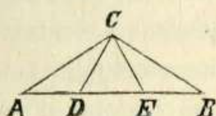


FIG. 2

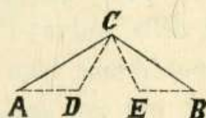


FIG. 3

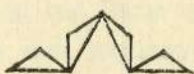


FIG. 4

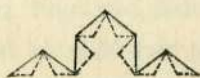


FIG. 5

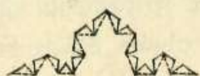
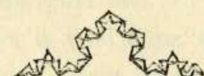


FIG. 6



Spingendosi molto avanti nelle successive approssimazioni i triangoletti finiranno con l'avere un'aria così piccola da ridursi sensibilmente a punti; l'area che rimane dopo le successive sottrazioni di triangoli equilateri tende a zero e l'insieme limite di tutti gl'insiemi finiti che si son venuti costruendo ha *estensione nulla*, cioè rappresenta una curva (curva di von Koch). Però questa curva non è presentabile, non è *ostensibile* come un arco di parabola, una circonferenza e simili. Le prime approssimazioni sono *determinate ed ostensibili* (fig. 2-6,) la centesima approssimazione già non è ostensibile, pur essendo determinata; a più forte ragione

la *curva al limite*, perfettamente determinata, non è ostensibile. Dunque, dicendo curva di von Koch, la parola curva deve intendersi in senso trasferito. Qui il trasferimento del significato è giustificato dal fatto che l'insieme limite di tutti gl'insiemi delle fig. 2, 3, ... ha estensione nulla, come per l'insieme dei punti delle ordinarie curve.

Dopo ciò, a noi interessa di porre in evidenza una notevolissima proprietà della curva di von Koch. Paragoneremo la fig. 3ª alla 5, cioè la curva in seconda approsimazione alla curva in quarta approsimazione. Vedremo che il primo triangolo a destra della fig. 3 è, nella fig. 5 diventato l'intera figura 3; nelle successive approsimazioni il primo triangoletto a destra della fig. 1 prenderà la forma dell'intera fig. 5 e così per tutti i triangoli. *Al limite si potrà dunque dire che la curva si riproduce per intero (è per intero) in ogni sua parte infinitesima.* Questa novella realizzazione dell'idea del *tutto in tutto* presenta un vantaggio sull'altra interpetrazione di cui si tratta nel nº 74. Mentre un insieme infinito può essere *equivalente* o *simile* ad una sua parte propria solo in senso traslato, la curva di von Koch è simile ad ogni sua parte infinitesima, però *in senso proprio*; essa è veramente tutta in ogni sua parte per quanto piccola Cesaro esprime liricamente questa proprietà della curva: « Cet emboîtement sans fin d'une figure en elle même nous donne bien l'image de ce que Tennyson appelle l'*infini vers l'intèrieur*, qui est, après tout, le seul « infini qu'il nous soit donnè de concevoir dans la nature. C'est cette « similitude entre le tout et ses parties, même infinitèsimales, qui nous « porte a considèrer la courbe de von Koch comme une ligne merveilleuse « entre toutes. *Si elle ètait douèe de vie, il ne serait pas possible de l'anè-* « *antir sans la supprimer d'emblèe, car elle renaitrait sans cesse de la pro-* « *fondeur de ses triangles, comme la vie dans l'univers* ».

So mai dunque arrivati all'infinito concreto? Non ancora, al perchè curva di von Koch non è ostensibile e presenta il carattere della *determinatezza* che è proprio dei concetti astratti della matematica.

76. I caratteri distintivi dell'infinito concreto.

La matematica è costruita nel campo del *pensiero determinato* ed anche quando raggiunge l'infinito, raggiunge un *infinito determinato*, contraddizione in termini se si riferisce all'infinito concreto. L'unico *concreto* della matematica è alla sua base, è la pura intuizione, che presenta il *continuo lineare*, ma questo non è determinabile e non è tutto in tutto.

Solo le curve di von Koch sono determinate ed hanno il carattere del tutto in tutto, *ma non sono ostensibili.* L' infinito della matematica è l' infinito astratto. Ma appena siano sintetizzati i caratteri di questo infinito astratto, si rivela la necessità di superarlo: *l' infinito concreto si mostra nel superamento dialettico dell'infinito astratto.* I suoi caratteri sono dunque:

1° L' *ostensibilità*: presenzialità dell' infinito concreto.

2° La *non determinabilità*: ogni determinazione sarebbe una limitazione.

3° La *semplicità* od *in — dividualità*: l' esser *tutto in tutto.*

Questi caratteri la filosofia riconosce nell' *io* e nell' *assoluto.*

Il passaggio dalla conoscenza concettuale (campo del pensiero determinato) alla conoscenza speculativa è niente altro che il passaggio dall' infinito astratto all' infinito concreto. In questo il criterio della testimonianza si arrichisce di nuovo contenuto perchè deve *prendere in pieno* l' attività oggettivante del pensare come *autoctisi.*

CAPITOLO 3°

CONSIDERAZIONI SU L'INFINITO CONCRETO

77. Distinzioni fondamentali tra le scienze speciali e la filosofia.[1]

Un problema singolo di una scienza particolare si può isolare e trattare a parte, perché, premessi certi dati in numero finito si può iniziare e condurre definitivamente a termine la soluzione. Es: il problema dell' infinità dei numeri primi, proposto e risoluto completamente nei numeri 46 e 47. Un problema filosofico, invece, si può solo provvisoriamente staccare dagli altri, quando si guardi da un punto di vista speciale; se lo si vuol trattare a fondo si riconosce subito la sua solidarietà completa con tutti i problemi speculativi. Ciò accade perché nelle quistioni filosofiche non vi sono propriamente *dati*, non vi sono definizioni definitive da premettere, non vi è un' assoluta prima proposizione, poi una seconda ecc. Le definizioni e le proposizioni si vanno svolgendo nell' approfondire il problema.

Non v' è una conclusione che non sia già implicita fin nell' inizio della ricerca, e che non sia presente in ogni momento del processo. Le diverse formulazioni dello stesso problema costituiscono un progresso ed un approfondimento continuo della quistione e mostrano sempre più l' intima connessione dell' indagine con tutti i problemi filosofici. Ogni nuova rielaborazione degli elementi dinamici del processo è propriamente una nuova soluzione, che confermando e ribadendo tutto quello che era già acquisito, in *quel di più che rende esplicito* prepara altre enunciazioni ed altre solu-

---

[1] G. Gallucci; " L' attualità dello spirito „ Mem. Acc. Pontaniana 1919.

zioni più progredite. Tutti i problemi filosofici sono così intimamente solidati tra loro che non se ne può approfondire uno senza approfondire tutti gli altri. Certo non si può iniziare la trattazione di una quistione senza una limitazione provvisoria, ma, in seguito, tale limitazione dev'essere superata, in modo da permetterci di penetrare nel significato di tutte le altre quistioni. La forma espositiva della trattazione può anche, talvolta, presentarsi con uno schema logico deduttivo, come ad es: nell'*Etica* di Spinoza ma si riconosce subito che il presunto sistema è una soprastruttura non essenziale, ed anche logicamente imperfetta: la conclusione, cioé l'idea della *vera libertà* è già implicita nell'idea iniziale della *causa sui* ed è sempre presente e si svolge dal libro 1° al libro 4°.

Nelle quistioni scientifiche l'oggetto è inteso nel suo *significato finito*; nella speculazione filosofica l'oggetto è inteso nel suo significato infinito. Da ciò il carattere unitario della filosofia, unità che è *in — dividuità* e rivela la presenza dell'idea nel suo significato infinito. Si spezza questa unità quando si ammettono gradi di conoscenza staticamente distinti; allora si è condotti a porre delle differenze con *residuo irriducibile assoluto*, p. e. tra materia e forma, tra esperienza interna ed esperienza esterna, tra il *fenomeno* ed il *noumeno*. Nei gradi di conoscenza deve rivelarsi la unità dello spirito: se l'*infinito concreto* non è già implicito nell'infinito astratto della conoscenza delle scienze speciali, esso non può venir fuori che come un *Deus ex machina*. Qualsiasi proposizione di una scienza speciale ha già un significato infinito, che si può approfondire, ed in questo approfondimento è il passaggio dall'infinito astratto all'infinito concreto. G. B. Vico trasse dalla sola conoscenza del primo libro di Euclide la sua dottrina dei principii della matematica e da questi si elevò alla concezione filosofica del *conoscere come fare*. Anche il più insignificante teorema di geometria o di aritmetica ci può condurre all'indagine speculativa del carattere della conoscenza matematica, e per conseguenza ad altri problemi non più di matematica, sino a farci riconoscere la perfetta solidarietà di tutti i problemi filosofici.

78. **Unità di problema e di soluzione; la tesi di Benedetto Croce.**

Abbiamo detto che l'oggetto del pensiero, come *assoluto*, è inteso nel suo significato infinito; allora la formulazione di un problema filosofico, in un dato momento della speculazione, non può essere che provvi-

soria, perchè intimamente connessa con la determinazione *attuale* dei termini del problema. Si può anzi affermare che il problema sorge dal significato stesso dei suoi termini e la sua soluzione è tutt' una con le particolari relazioni che in quel dato momento il pensiero speculativo concepisce tra quegli elementi. Gli elementi dinamici del processo si presentano come *temi fondamentali* della speculazione filosofica, e, secondo il loro grado maggiore o minore di sviluppo, essi forniscono una soluzione più o meno progredita. L' illusione di una *soluzione definitiva* nasce dal considerar come *statici* gli elementi dinamici del problema; allora l' oggetto dell'attività pensante viene staccato dal *totum simul*, isolato e trattato a parte, viene cioè considerato nel suo significato finito.

A chiarimento delle considerazioni ora esposte aggiungiamo un esempio. Il problema ontologico nella speculazione parmenidea si presenta insieme con la sua soluzione appropriata al grado di svolgimento dei temi fondamentali dei primordi della filosofia. Termini del problema: lo essere, il non essere, il divenire. Il contrasto tra la conoscenza empirica e la conoscenza concettuale si presenta in Parmenide come opposizione tra *opinione* e *verità*. L' opinione si riferisce al mutabile, a ciò che *diviene*, la verità a *ciò che persiste*. Solo ciò che permane può pensarsi senza contraddizione (l' Essere); ciò che non permane, ciò che *diviene*, non può pensarsi senza contraddizione (il non — Essere). *L' essere solo è pensabile*; *essere è pensare è lo stesso*. Questo è il tema centrale della filosofia di Parmenide; esso esprime conteporaneamente il problema dell' *Essere* e la sua soluzione quale si prospettò all' eleate. L' Essere concepito come oggetto implica già l' Essere concepito quale soggetto; la speculazione successiva renderà man mano espliciti quegli elementi che sono già in germe nella speculazione parmenidea (il νοῦς di Protagora, la tesi del Timeo di Platone, il λόγος giovanneo, l' eterno presente di Sant' Agostino e così via via sino alla concezione hegeliana dello spirito come *an-und-für sich Sein*.

Passando dai problemi filosofici ai problemi delle scienze particolari non si può più sostenere la tesi dell' identità di problema e soluzione. Infatti tale identità discende dal significato infinito dell' oggetto della speculazione filosofica, cioè della sua *in-dividualità*. L' oggetto di una ricerca scientifica, invece, è considerato nel suo significato finito; i termini del problema sono perfettamente determinati ed isolati automaticamente da tutti gli elementi estranei alla teoria che si va svolgendo. In queste condizioni si può ben parlare di una soluzione non implicita nei termini

del problema, ed anche di una soluzione definitiva. Così il problema della quadratura del cerchio (costruire un quadrato equivalente ad un cerchio servendosi della riga e del compasso) si presentò ai matematici greci che *indarno cercarono di risolverlo.* La risoluzione negativa, cioè la dimostrazione dell'impossibilità della quadratura del cerchio, si ebbe una ventina di secoli dopo, quando cioè i progressi della geometria e della analisi fornirono tutti quegli elementi, che, sfruttati genialmente da Hermite e da Lindmann, condussero alla dimostrazione della trascendenza di π.

La tesi dell'identità di problema e soluzione fu così enunciata da Croce[1]: « In verità, come mai si potrebbe formulare un problema se non « venisse, nell'atto stesso, risoluto? Formulare un problema è determinare « i termini, e determinare i termini importa insieme determinare la rela- « zione dei termini tra lorò e col tutto; altrimenti, i termini resterebbero « vaghi ed incerti, e vago ed incerto il problema, cioè non formulato. Ma « determinare termini e relazione vale risolvere il problema: perchè co- « s'altro mai sarebbe da aggiungere? Qual altro era il fine del porre il « problema, se non, proprio, ottenere quella deferminazione? »

Gli esempi che riportammo mostrano il senso in cui può accettarsi la tesi di B. Croce; essa determina uno degli aspetti fondamentali della distinzione tra le scienze speciali e la filosofia. Risulta pure il senso in cui la tesi è evidentemente falsa; quando essa cioè vien riferita ai problemi di una scienza particolare. E l'errore è duplice: 1° Solo se l'oggetto è un *totum simul* (tutto in tutto) la determinazione dei termini importa insieme la determinazione delle relazioni dei termini tra di loro e con il tutto; dunque l'identità di problema e soluzione può sostenersi solo per i problemi filosofici. 2° La determinazione del significato dei termini è considerata come *definitiva*, insieme con la determinazione *delle* retazione tra i termini; sfugge quindi il carattere dinamico dell'impostazione del problema e della sua soluzione anche nel campo puramente speculativo. Solo se l'oggetto è considerato nel suo *significato finito* è possibile determinare definitivamente il significato dei termini, ma con ciò non risultano determinate le relazioni tra i termini; tali relazioni non sono implicite nelle premesse *perchè nelle teorie scientifiche il procedimento non è analitico, ma sintetico.* Non v'é risoluzione di problema o scoverta che non vada al di

[1] « Sulla filosofia teologizzante e le sue sopravvivenze » (Atti dell'Accademia Pontaniana 1919).

là delle semplici premesse formali, siano pure queste perfettamente determinate. E ciò perchè, in matematica, una cosa è enunciare un problema ed un' altra cosa il risolverlo. Vi sono persino dei problemi i cui termini sono perfetfamente determinati e che non sono stati ancora risoluti; esempio: trovare le soluzioni intere dell' equazione $x^n + y^n = z^n$ per n maggiore di 2.

79. **L' autoctisi come conversione di processi ideali in reali.**

Passando dall' osservazione all' esperienza notammo (n^0 62) nell' attività del pensare un' azione cosciente, cioè *determinata da un complesso di stimoli e volta ad un fine*. Ora considereremo l' azione in generale come l' attività oggettivante per eccellenza.

L' azione può definirsi *conversione di un processo ideale in reale*. Libero svolgimento (caratteristica fondamentale di ogni attività) e coerenza interiore (data dall' insieme degli stimoli e dal fine) sono i due inseparabili momenti di ogni processo ideale convertibile in reale, momenti *di significato infinito*. L' attività che, mentre si svolge con assoluta libertà, tende ad una coerenza interna assoluta, è la ragione. E poichè l' azione è già una contrazione nel finito dei due momenti di significato infinito, la *libertà* di svolgimento del processo ideale e la *logicità* o coerenza interiore, non essendo compiutamente in atto, appaiono in opposizione dialettica. La realizzazione dell' idea si presenta perciò come libero processo dello spirito, in opposizione con la coerenza interna o logicità della *ragione raziocinativa*. Gli elementi ideali del processo, in quanto stimoli dell' azione, hanno una funzione oggettivante perchè realizzano nell' azione il loro oggetto, però mai compiutamente; l' azione stessa non è senza influenza sul processo ideale. L' individuo *espandendosi* nell' azione, in un certo modo si rinnova, trascende se stesso. La vera attività dell' uomo è in questo continuo trascendersi in cui viene realizzata la conciliazione dei due momenti opposti della *libertà* di svolgimento e della logicità. L' espandersi della personalità dell' uomo, il suo rinnovarsi e trascendersi nella azione, sono rappresentati nel modo più efficace nei protagonisti di «Guerra e pace» di Tolstoi: il principe Andrea e Pietro Besukoff.

Passando dall' attività individuale all' attività collettiva, appare nella sua piena efficienza la funzione oggettivante del processo ideale. Se lo insieme degli stimoli è costituito da motivi comuni di azione nella vita associata ed il fine supera gll' interessi dei singoli per diventare un' aspirazione comune ad un bene superiore, l' oggetto è proiezione dall' uomo fuori del-

l'uomo di pensieri e di sentimenti condivisi da masse di uomini nella loro tendenza a liberarsi dalla schiavitù della *città terrena*. Sorgono così i miti (mito della città di Dio, mito della società comunistica, miti religiosi in generale). Una volta determinatosi il *mito*, esso diventa regola delle azioni e si evolve con l'azione stessa.

La formazione delle ideologie segue lo stesso ritmo della formazione dei miti. Bisogna però distinguere l'*ideologia* dall'*idea*. L'idea di libertà ha un significato infinito nella stessa attività umana, l'ideologia liberale è contrazione del significato infinito dell'idea nel finito di un determinato momento storico. L'idea si realizza, ma incompiutamente nell'ideologia cui trasmette la funzione oggettivante; in ciò consiste la *funzione pratica* dell'ideologia. L'oggetto in cui l'ideologia si realizza non è fisso ed immobile; l'atto stesso della realizzazione conduce ad una continua revisione dell'ideologia, la quale ha così *un principio interno del suo mutamento.*

Nel mio libro «Ideologia e realtà» trovasi un'applicazione di questo all'ideologia marxista.

La concezione filosofica implicita nelle considerazioni precedenti si può riassumere così: Ogni processo ideale, sia esso una costruzione scientifica, sia un sistema filosofico, sia una teoria sociale e religiosa, è attività oggettivante, cioè attività che realizza il suo oggetto. Tale realizzazione è nell'*esperimento in senso lato* e consiste nella reciproca conversione di processo ideale in reale e il processo reale in ideale. Il presupposto fondamentale è l'affermazione dell'idea nel suo significato infinito; la conversione in reale è la contrazione dell'infinito nel finito; però ogni limitazione appare provvisoria ed è automaticamente superata. Questa tendenza al superamento del finito e del determinato si mostra nella continuità dei gradi di conoscenza e si rivela nello stesso linguaggio mediante le varie forme di traslati: generalizzazione, analogia, similitudine (*il come se*), allegoria, mito, ideologia.

80. L'irrazionalismo: l'inversione della tesi Hegeliana.

Abbiamo detto che nella ragione la libertà dello svolgimento del processo ideale e la coerenza interiore o logicità, non essendo compiutamente in atto appaiono in opposizione dialettica. Da questa premessa si traggono importanti conseguenze:

a) Non esiste un criterio assoluto della verità perchè, in qualunque modo s' intenda tale criterio, in esso l' idea della verità sarebbe compiutamente in atto. Non è dunque possìbile, fuori della conoscenza astratta, formale, costruire un processo ideale di una coerenza interna assoluta: « Ce qui surpasse les Mathématiques nous surpasse » come disse Biagio Pascal. (Impossibilità ed errore di qualsiasi *sistema* che si presenti come definitivo, impossibilità di una teoria scientifica o filosofica *compiuta*).

b) È nello spirito che l' idea è in atto, quindi non esiste realtà indipendente dallo spirito: non esiste da una parte la verità o realtà e dall' altra il nostro spirito che la *contempla*. La realizzazione dell' idea appare perciò come libero svolgimento in opposizione alla logicità della ragione raziocinativa. Ecco perchè l' argomento del *cogito* ha sempre condotto la speculazione filosofica alla tesi della libertà e dell' autonomia dello spirito. (Sviluppo del tema agostiniano e cartesiano del *cogito* nella *filosofia dell' azione*, nella *filosofia della libertà*, nella *filosofia della contingenza*).

c) Data la detta opposizione tra libertà e necessità logica, ogni svalutazione della ragione raziocinativa comprende implicitamente una *sopravalutazione* della libertà come molla del concreto svolgimento del processo ideale; si contrappone al concetto in sè chiuso l' *intuizione*, il *senso illativo* ed alla pura contemplazione la vita vissuta (Irrazionalismo, intuizionismo anti-intellettualismo.

d) L' irrazionalismo conduce all' inversione della tesi hegeliana: « Ciò che è razionale è reale e ciò che è reale è razionale ». Il reale, l' infinito concreto, in opposizione al *determinato* della ragione raziocinativa, ha la caratteristica della *presenzialità*. Il movimento, l' *io*, l' assoluto, sono ostensibili, non determinabili. Se la ragione s' intende come attività che determina i concetti circoscrivendoli con una definizione, il movimento, l' *io*, l' assoluto sono irrazionali. Cioè *il reale è irrazionale*. Però non si può affermare che, viceversa, ciò che è irrazionale è reale; vi sono irrazionali che non sono reali, e la ragione è buon giudice nella critica delle *finzioni* quali *irrealtà*.

e) Negata l' esistenza di un criterio assoluto della verità, tre atteggiamenti sono possibili: 1° Negare l' idea stessa di verità, arrivando così a questa conclusione. che affermare vera una proposizione non ha senso alcuno (scetticismo vero e proprio). 2° Dare un senso alle affermazioni ed alle negazioni ricorrendo, non ad un criterio logico, ma alla *vita vissuta*. Non essendo possibile una vera spiegazione dei fenomeni ci si limita alla pura descrizione e registrazione. Allora i principî e le leggi si mostrano

semplicemente come mezzi *comodi economici* ed *utili* al raggiungimento di un certo ordine (empiriocriticismo, prammatismo). 3° Cercare di conciliare i momenti dialettici opposti della ragione (lìbertà di sviluppo e necessità logica) presentando il processo ideale convertibile in reale per mezzo dell' attività stessa del pensare considerata come allività oggettivante (criterio della testimonianza, non formale e statico, ma reale e dinamico).

L' opposizione dialettica tra libertà spirituale e necessità logica, che ho tentato di rappresentare, si può vedere attuata nella storia della filosofia.

1° È *necessario* cercare nell' uomo stesso il criterio della verità (argomento di Protagora) ma è *impossibile* (Risposta di Platone, affermazione dell' idea di verità nel suo significato infinito).

2° Se l' idea di causa ha un significato, bisogna trovarlo *necessariamente* nell' esperienza (argomento di Hume), ma ciò è *impossibile,* perchè l' idea di causa condiziona l' esperienza stessa (risposta di Kant).

3° Trascendere il fenomeno è *impossibile* (critica della ragion pura) ed è *necessario* (critica della ragion pratica).

A questo punto bisognerebbe ripigliare la considerazione del criterio della testimonianza per studiarne lo sviluppo nel passaggio dalla conoscenza concettuale alla conoscenza speculativa, per giungere sino al significato mistico. Ma questo sarà l' oggetto di due altri miei saggi ; nel primo (dal titolo « Nova et Vetera ») approfondirò il significato filosofico del criterio della testimonianza, presentando una sintesi dei sistemi filosafici considerati come sistemi di allegorie, e nel secondo (dal titolo « Ecce Homo ») mi occuperò del criterio nel suo significato mistico collegato con if problema moraie, con il problema religioso, con il problema sociale.

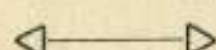
Nell' attuale saggio abbiamo già percorso il lungo cammino che va dalla « Grammar of science » di Pearson alla « Grammar of assent » di Newman.

81. Conclusione.

Una rappresentazione efficace della differenza tra l' infinito astratto e lo infinito concreto si ha ponendo a fronte un brano di una costruzione scientifica ed un brano di poesia.

TEOREMA: « *Se i numeri a, b sono divisibili per p, anche $a+b$ è divisibile per p.*

Infatti se $a = mp$ e $b = np$, sarà $a + b = mp + np = (m + n)\,p$ per la proprietà distributiva. Dunque $a + b$ è divisibile per p.



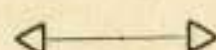
S. AGOSTINO: " *Confessioni* „ Libro I

« Summus enim es et non mutaris:
« *neque peragitur in te odiernus dies,* et
« tamen in te peragitur; quia in te sunt
« et ista omnia; non enim haberent vias
« transeundi, nisi contineres ea. Et quo-
« niam anni tui non deficient, *anni tui ho-*
« *diernus dies.*



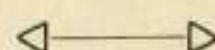
Principio dell' impulso : L' impulso $F \times t$ è eguale alla quantità di moto mv.

Infatti, per il 2° principio della dinamica si ha $F = m\,a$, ove *a* é l' accelerazione. Moltiplicando per t si trova $F \times t = m.a.t$, ma $a\,t = v$, dunque $F \times t = m.v.$



"*Confessioni* „ Libro I

« Quid ad me, si quis non intelligat?
« gadeat et ipse dicens: quid est hoc?
« Gaudeat etiam sic, et amet non inve-
« niendo invenire potius, quam inveniendo
« non invenire te.



Aristotele :

πᾶσα διδασκαλία, και πᾶσα μάθεσις διανοητκή ἐκ προυπαρχουσης γίνεσθαι γνώσεως.

Post. Anal. I cap. 1°

Leopardi.

« E naufragar m è dolce in questo mare »

L' infinito.



